中国文库

·科学技术类·

中国古代历法

（上）

张培瑜等 著

中国科学技术出版社

中国文库
科学技术类

中国古代历法

（上）

张培瑜　陈美东　薄树人　胡铁珠　著

中国科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

中国古代历法/张培瑜等著. —北京：中国科学技术出版社，2007.9
(中国文库)
ISBN 978-7-5046-5071-9

Ⅰ. 中… Ⅱ. 张… Ⅲ. 古历法—研究—中国
Ⅳ. P194.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 143219 号

策划编辑：吕建华　许　英
责任编辑：吕建华　许　英
整体设计：翁　涌　李　梅
责任印制：董文权

中国古代历法(上、下)
Zhongguo Gudai Lifa
张培瑜等　著

中国科学技术出版社出版
http://www.kjpbooks.com.cn
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮编：100081
北京瑞古冠中印刷厂印刷　　新华书店总店北京发行所经销
2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
开本：880 毫米×1230 毫米　1/32　印张：33.75
字数：780 千字　印数：1—4500
ISBN 978-7-5046-5071-9
定价：57.00 元(全二册)

“中国文库”出版前言

“中国文库”主要收选20世纪以来我国出版的哲学社会科学研究、文学艺术创作、科学文化普及等方面的优秀著作和译著。这些著作和译著，对我国百余年来的政治、经济、文化和社会的发展产生过重大积极的影响，至今仍具有重要价值，是中国读者必读、必备的经典性、工具性名著。

大凡名著，均是每一时代震撼智慧的学论、启迪民智的典籍、打动心灵的作品，是时代和民族文化的瑰宝，均应功在当时、利在千秋、传之久远。“中国文库”收集百余年来的名著分类出版，便是以新世纪的历史视野和现实视角，对20世纪出版业绩的宏观回顾，对未来出版事业的积极开拓，为中国先进文化的建设，为实现中华民族的伟大复兴做出贡献。

大凡名著，总是生命不老，且历久弥新、常温常新的好书。中国人有“万卷藏书宜子弟”的优良传统，更有当前建设学习型社会的时代要求，中华大地读书热潮空前高涨。“中国文库”选辑名著奉献广大读者，便是以新世纪出版人的社会责任心和历史使命感，帮助更多读者坐拥百城，与睿智的专家学者对话，以此获得丰富学养，实现人的全面发展。

为此，我们坚持以“三个代表”重要思想为统领，坚持贯彻“百花齐放、百家争鸣”的方针，坚持按照“贴近实际、贴近生活、贴近群众”的要求，以登高望远、海纳百川的广阔视野，披沙拣金、露抄雪纂的刻苦精神，精益求精、探赜索隐的严谨态度，投入到这项规模宏大的出版工程中来。

“中国文库”所收书籍分列于8个类别，即：(1)哲学社会科学类(哲学社会科学各门类学术著作)；(2)史学类(通史及专史)；(3)文学类(文学作品及文学理论著作)；(4)艺术类(艺术作品及艺术理论著作)；(5)科学技术类(科技史、科技人物传记、科普读物等)；(6)综合·普及类(教育、大众文化、少儿读物和工具书等)；(7)汉译学术名著类(著名的外国学术著作汉译本)；(8)汉译文学名著类(著名的外国文学作品汉译本)。计划出版1000种，自2004年起出版，每年出版1至2辑，每辑约100种。

“中国文库”所收书籍，有少量品种因技术原因需要重新排版，版式有所调整，大多数品种则保留了原有版式。一套文库，千种书籍，庄谐雅俗有异，版式整齐划一未必合适。况且，版式设计也是书籍形态的审美对象之一，读者在撷取知识、欣赏作品的同时，还能看到各个出版机构不同时期版式设计的风格特色，也是留给读者们的一点乐趣。

“中国文库”由中国出版集团发起并组织实施。收选书目以中国出版集团所属出版机构出版的书籍为主要基础，逐步邀约其他出版机构参与，共襄盛举。书目由“中国文库”编辑委员会审定，中国出版集团与各有关出版机构按照集约化的原则集中出版经营。编辑委员会特别邀请了我国出版界德高望重的老专家、领导同志担任顾问，以确保我们的事业继往开来，高质量地进行下去。

“中国文库”，顾名思义，所收书籍应当是能够代表中国出版业水平的精品。我们希望将所有可以代表中国出版业水平的精品尽收其中，但这需要全国出版业同行们的鼎力支持和编辑委员会自身的努力。这是中国出版人的一项共同事业。我们相信，只要我们志存高远且持之以恒，这项事业就一定能持续地进行下去，并将不断地发展壮大。

“中国文库”编辑委员会

《中国天文学大系》编委会

本书著者　张培瑜　陈美东　薄树人

胡铁珠

总 序

中国古代天文学建树非凡，遗泽久长，是我们民族的骄傲。我一直怀着崇敬的心情向往着这份文化珍宝。只是数十年漫漫学海中有许多错过的机缘，以致今天仍还像是一个鹄立在圣殿门前的朝圣者，终未能进入门庭。尽管如此，我仍然感受到很大的喜悦、有幸在新中国成立初期百废待兴之际，见证了在竺可桢先生的倡导下，中国古代天文研究跨出了前所未有的聚集人才、系统"攻关"的步骤，而从那时起经两代人的努力，资料齐集，成绩斐然。如今又促成了这一由中国科学院自然科学史研究所牵头，组织全国各单位的天文学史研究者齐力完成的学术壮举——一部上起夏商，下逮近代，罗列我国古天文学万象的六百万言鸿篇巨制！

纯粹用现代科学的眼光审视古代天文学，首先，它是一门旨在认识天文世界——发现天文现象、探究天文规律的自然科学。这和今日的学科定位并无不同。其次，它是一门"观测的科学"，今日也仍然如此。如果把天文观测工具的"古"的界限设在天文望远镜应用之前，那么古代天文学眼界中所有的天体不超过7000个，这使得天文实测研究的对象限于几个太阳系天体的表象及其运行轨迹，星空的监测以及几千个恒星的定位和陈列。这些，中国和其他古代文明的情况基本上一致，可以认为是历史的必然。

与之相应的天文理性认知的探求，这样规模的"天"，相对于地上的万物和人间的万众，虽然仍然是伟大、永恒，但也显得比较简单、稳定，导致了我国古代"天覆地载，人居于中"、天地人"三

才”协调的宇宙观。这在一方面形成了宇宙结构、天体演化、天人感应的种种学说，成为我国古代哲学思想的一个组成部分；另一方面，把天文实测结果的解释引向到“天文”与“地理”的相关性、“天道”与“人事”的相关性的探求。前者把“天”联到了“地”，导致了在“时政”、“编历”这些“国之大政”上的应用；后者把“天”联到了“人”，应用到了当时同样属于“国之大政”的“星占”。这些“应用天文学”备受尊崇，历代政权为之设立专职，在设备投资、人员培训上享有优遇，结果在历史长卷中成为我国古代天文学发展的主线索：保持了天象监测的长期持续性、主导了一代代天文仪器、实测方法的研究和发展以及一代代历算方法（和有关数学）的研究和发展。由此形成的堪称完整的体系，加上求实、求精的敬业传统，为我们留下了大量宝贵的历史资料和学术资料（其中也包括了与之相互影响的历代官方与非官方的天文著述，也包括了频繁出现的天文文物）。这种由长期皇权统治产生的古代版的“任务带动学科”的发展模式，历史功过暂且不去评论，但这份“资料宝库”对于今日中国天文学史工作者来说则是巨大的学术资源，当然同时也是巨大的责任，要很好地发掘和整理。

继20世纪70年代后期天文史料的一次大规模整理，中国天文学史工作者“自1979年起开始思索：是否有可能编著一部与中国天文学的悠久历史和广阔的内涵相适应的中国天文学史著作？商议的结果便是《中国天文学史大系》构想的诞生”（薄树人先生语）。

天文学是我国古代最发达的自然科学之一，在华夏科学、文化史中是一个具有连贯性的组成部分。在《中国天文学史大系》（以下简称《大系》）的全套书结构中，《中国古代历法》、《中国古代天体测量学及天文仪器》、《中国古代星占学》、《中国古代天象记录的研究与应用》、《中国古代天文学思想》、《中国古代天文机构与天文教

育》、《中国古代天文学家》各立一卷，以概全面。完成这样的一部《大系》，可谓是从一个重要的侧面来认识华夏文化的源与流。

近世100多年，华夏文化受西方文化的冲撞，激湍跌宕，对传统文化的理解和传承出现前所未有的震动，至今波澜未已。其间在天文学上体现为结束古代传统、“转轨”西化、进入近现代的航道。《大系》中所设的《中国古代天文学的转轨与近代天文学》一卷，阐述了这一时期的历史。

全套书中用《中国少数民族天文学》一卷介绍了对同属华夏文化的发掘和整理，是一项开辟性的探索。另一卷《中国古代天文学词典》篇幅达47万字，对天文典籍阅读者是十分有用的工具，也是好伴侣。《大系》共10卷，每卷40万到80万字。格局齐整，足以副“大系”之称。这是当年我国一代中青年天文学史工作者“聚水成渠”的宏愿。回溯“五四”运动大潮中，我国现代天文学的先驱者们在率先“西化”的同时就着力启动了我古代天文学遗产的自力发掘和整理。60年过后我们喜见《大系》的构思(1979)，然后是构思落实为计划(1990)、诞生了文稿(1999)，现在文稿得以付梓(2007)完成了“多年修就的善果”(陈美东先生语)。

《大系》从构思到面世历时四分之一世纪。多位学者为之贡献了属于一生中最好的年华。他们如今青丝成雪，有几位且已过早地离开了我们。编委会主任薄树人先生从一开始就为《大系》的筹、编、写呕心沥血，奋斗到了最后一息(1997)。继后陈美东先生以令人钦佩的执着挑起担子，完了大家的宏愿。而他们二位在本书跋记中所透露的甘辛，或亦足以在相应历史中着上耐人寻思的一笔！

王绶琯

2007年7月于北京

前言

历法是研究日月五星运行，推算各种计时单位长度，建立其间关系，制订时间序列法则的科学。

中国以农业立国，农时与季节有密切关系。因此授时颁历一直是历代君主的要务。《史记》说，“王者易姓受命，必慎始初，改正朔易服色，推本天元，顺承厥意。”颁历于是也成为君权统治的象征。臣民奉谁的正朔就表示接受谁的统治。因此，“自殷周皆创业改制”，到清末3000多年，中国历法数十改，制历逾百家，是世界上历法科学最发达的国家。颁行的历法中，除太平天国天历外，全是阴阳合历。辛亥革命后，中国改行格里历（公历、阳历）。但至今我国颁行的历书中仍附载阴阳历月日（又称农历、夏历）。

阴阳历的平均年长称“岁”，是反映寒暑变化的回归年。月长由月相盈亏圆缺周期决定，即朔望月。以太阳周日视运动形成的昼夜为日。历法三要素的年月日全是依据日（太阳）月（太阴）天象得出，这是阴阳合历的基本性质。

由甲骨卜辞可知，殷商武丁时期的历法已是月有大小年有平闰（12个月或13个月）的阴阳合历。到清末，阴阳历一直是中历的主要形式。但与其他阴阳历不同，中历还有两个显著的特点。

二十四节气是中国的独创，这是中历的第一个特点。它是在四时八节基础上发展起来的。殷周之交已分四时，春秋时代已有分至启闭八节。到战国晚期就形成了完整的二十四节气体系。二十四节气是中历确定月名月序和设置闰月的凭藉，也是农事活动的主要依据。节气由太阳位置决定，反映太阳的视运动。在历

书中有着固定的月份和日期范围，使中历具有较强的阳历性质。

中历一直配合采用干支来纪时（年月日时），这是中历的第二个特点。殷墟卜辞显示，3000多年前古人已熟练地用干支纪日。西汉末至今，一直用干支来纪年。春秋战国时期已采用十二辰纪月，而十二辰加时制度至迟西汉时已被采用。2000年来中国干支纪时与历法数序纪时既互相配合又各自成系统。实际上中历干支纪时系统是中国特有的阳历历法体系。可称之为干支历、节气历或中国阳历。它以立春为岁首，交节日为月首。年长即回归年，一节一中为一月。在节气历中年月日全由太阳视运动决定而与太阴月相无关。但它又与通常的阳历不同，后者月长是由人为规定而与天象无涉。所以它是有中国特色的阳历。唐以后，五代历书月名开始注以干支，北宋时又将十干十二辰配合以纪时，至此年月日时分别全以干支注记，节气历日趋完整。它实际上是“十二气历”和“天历”的滥觞。可惜的是，在古代干支历日多与历法纪时配合，只在历书中注记或民间用于象数、选择和命理学中，它在历法上的作用一直未能得到很好的认识。

殷商、西周以前的远古时期，历法属于观象授时阶段。主要通过昏旦观测某些标准星象（鸟火昴虚参斗等）的伏见南中和月相来颁告四时、朏望和农时季节，西周以后进入推步制历时期。早期推步历法颁历就是颁朔。以计算四时八节朔闰历日为目的。西汉末年开始，推步内容有了发展。由单纯的历日制度扩大到了日月五星运行的天体历。自此以后，中国历法并不限于推算日历。它包括了中朔、发敛、日躔、月离、晷漏、日月食和五星运动等七方面的计算内容。

随着天文、数学的进步发展，中国古历计算方法的历史进程可分作如下四个阶段。

(1)古代，先秦两汉至南北朝，这一段历法，主要以平运动计

算中朔和日月五星的位置(后期加进月行改正)。

(2)中世纪,隋唐五代宋元明时期历法,把日月五星视作变速运动。计算采用二次、三次内插,相减、相乘等算法。

(3)清初时宪历,采用第谷改进的地心体系,以本轮均轮、几何学和球面三角方法来计算天体的距离和速度变化。

(4)清代中、后期的历书,依据地心椭圆运动体系,开普勒第一、第二定律计算。

在中国古代上百部历法中约有半数文献中保存有比较完整的记载。在"二十四史"中十五史有"历志",记载斯时的历术和法数。但因历理深奥、术语难懂,一般读者都视作天书望而却步。但也有不少读者对历法情有独钟。他们希望历法书不仅介绍历法的发展进步,通过它还能了解一些历术的具体推步方法和计算程序。

颁历的主要目的是授时,用来指导农业生产和安排各项社会活动,重在推步和实用。所以本书侧重于历术的复原,并以多种形式介绍具体推步方法。但历经术文刊本多有错讹衍夺。复原历术算法、数据,往往困难重重。我们的工作是在前人基础上,又参考借鉴时贤的大量成果论著。尽管如此,有的历术的重建,还是只能采用参酌原文,依据天文概念反推的办法来进行。复原的历术是否正确,我们尽量查找文献中推步验历的实例来复算校核,以便确认。

在介绍各历推步方法时,我们尽量多举实例。这样,既利于深入领会历术推步原理、熟悉具体计算方法、公式、程序,又可方便读者自已计算校核、举一反三。在算例中本书还给出与前代历法及现代计算结果的比较,有助于了解历法的发展情况和古历推步所达到的精度。

本书还特别注意阐述历法各术推步的天文意义。让读者不

仅会算而且明白为什么要这样算。例如昏旦中星和恒星时的关系，就没有简单介绍今天计算恒星时的公式，而侧重从历理方面解释它与太阳、春分点位置的关系。

为了分析日躔月离表的盈缩朓朒及定朔的太阳月亮改正的正负号关系，并为说明中历定朔改正的精度，书中介绍了定朔计算的方法、公式，中历推步忽略了哪些项及会产生的影响。

宣明历引入气时刻三差，与天文学的视差，历术的高下差、南北差、东西差之间关系如何，视差对日食计算的影响和作用，等等。本书对此都作了一些定量的分析考查。为了讨论各历推求日度月度（日月位置）的精确情况，本书还介绍了计算太阳月亮位置和定气的简单方法和公式。

历法疏密，验在交食。中历特别重视日月食的计算。后者也促进了历法的发展。很多读者也对日月食推步感兴趣。从初期交食周期预报，到日月运动改正、据食限去交远近计算交食有无与食分大小、视差对交食的影响作用，直到授时、大统。本书对历代日月食计算方法作了比较系统的介绍。

本书是几位作者多年从事历法研究的心得和成果。作者撰著此书的初衷是侧重介绍历术推步及阐明计算的天文意义，希望读者通过此书能基本了解历法和历术的推步。

在17世纪中西文化大交融的过程中，由于接受了西方天文学思想和天体运动模型，又引进了几何学和球面三角等新的数学方法，中国的历法计算有了长足进步。清时宪历的推算及甲子元癸卯元的变革，正好反映了这一时期历法的重大发展变化。由于篇幅和研究涉猎的原因，本书未能包含“中西合璧时宪历”的内容，对上述历法推步发展的第三、第四阶段的介绍，书中只得付诸阙如。历法推步根据不同需要形成各类历书。御殿颁历乃国家盛典。原拟“中国的历书和历注”一章介绍历代各类历书，步发敛

术，历注的内容、发展、演变以及推算方法，也由于同样原因未能纳入本书之中。这些都是本书的不足和缺憾。

本书由张培瑜、陈美东、胡铁珠、薄树人四人分别执笔。陈美东撰写第一、二章，薄树人撰写第四章，胡铁珠撰写第八章，张培瑜撰写第三、五、六、七、九、十章。

张培瑜

2007年5月

目录

第一章　历表及表格计算法

中国古代历法有悠久的历史，走过十分漫长的发展道路。它包含十分丰富的天文学内涵，是中国古代天文学的重要组成部分，甚至可以说是中国古代天文学的精髓所在。除了年、月、日等的历日安排外，中国古代历法涵盖对日、月、五星运动的研究，具体而言，有朔、晦、弦、望、节气、卦候、闰月的计算，每日昼夜漏刻长度、晷长和昏旦中星的推算，日月交食的预报，日、月、五星在恒星间位置的推求，等等。这差不多相当于近现代天文年历所包括的内容。为了解决这众多的天文学课题，中国古代天文学者经过世代不懈的努力，从天文实践中不断发现新的天文现象，提出新的天文概念，并日益充实和完善。这主要表现在一系列天文数据和天文表格（历表）的测算、相应的数学方法的创用以及有关具体推算方法的建立，从而十分有效地解决了所设定的天文学课题。这些正是本书所要讨论的问题。

本章第一节简要地勾绘了中国古代历法的发展状况，以后各节具体介绍历法中各种历表及表格计算法。

中国古代历法拥有众多的历表，备载各种天文量的变化情况，是历家对这些天文量变化规律做定量描述的重要形式。这些历表的描述方式可以分为两大类：其一是以文字描述的方式，叙述某天文量在特定的基准点之间的变化情况；其二是以表格的方式，纵横向栏交错处列出某天文量在特定基准点的状况。此中第一种类型先见，第二种类型后出，两种类型长期共存，但以第二种类型为主要的方式。欲求与两个特定基准点之间某一时刻（或度

值）相应的天文量，历家则用一次差、二次差或三次差内插法求算之，这便是所谓表格计算法。以下大抵以这些历表出现年代的先后为序，对之做简要的介绍。

第一节　中国古代历法发展概况

我们的祖先生息在中国辽阔的土地上，在生产和生活实践中，逐渐发现日月星辰的升落隐现，自然界寒来暑往，猎物的出没和植物的荣谢等自然现象，与人类的生存有着重要的关系。所以，有意识地观察和认识这些自然现象，以期顺乎自然，求得自身的发展，便成为先民们感兴趣的问题，于是天文学的萌芽便油然而生。

古人日出而作，日没而息，就是以太阳的出入作为作息时间的客观依据。太阳出入造成的明暗交替的规律，必定给先民以极深的感受，于是以太阳出入为周期的"日"，应是他们最早认识的时间单位。自然，月亮的圆缺变化，是又一明显和意义重大的天象。说它意义重大，是因为月亮的亮光对于人们的夜间活动的安排是关键的要素。人们逐渐发现月亮的圆缺周期约为 30 日，这便导致一个较长的时间单位"月"的产生。对于更长一些的时间单位"年"的认识，要较"日"、"月"困难得多，但它是对于人们的生产和生活意义更为重大的一种周期，因为寒暑、雨旱，以及渔猎、采集乃至农业生产活动无不与它有关。所以，人们对它进行了长期的探索。由物候——草木枯荣、动物迁徙和出入等的观察入手，也许是探索一年长度的最早方法，随后才是对某些星象的观测，这便是所谓观象授时的方法。

传说在颛顼帝时代，已设立"火正"专司大火星（心宿二、天蝎座 α 星）的观测，以黄昏时分大火星正好从东方地平线上升起时，

作为一年的开始，亦即这一年春天的来临。这大约是公元前 2400 年发生的事，是为观象授时的初期形态。

据《尚书·尧典》记载，在传说中的尧帝时，乃命羲、和兄弟分别观测鸟、火、虚、昴四颗恒星在黄昏时正处于南中天的日子，来定出春分、夏至、秋分和冬至，以作为划分一年四季的标准。而且还采用了“期三百有六旬有六日，以闰月定四时成岁”的方法。这是中国古代应用阴阳历的初始历法的最早记载。据研究，与此四仲中星相符合的年代应在公元前 2000 年左右。

由甲骨文的有关卜辞，我们可以知道殷商时期（约前 1300—前 1027）行用的历法乃是阴阳历。这时的年有平年、闰年之分，平年 12 个月、闰年 13 个月。一年的长度大约已用圭表测量确定。又以新月作为一月的开始，月有大月和小月，大月 30 日、小月 29 日，并偶有连大月的出现。说明这时人们已得知朔望月长度应略大于 29.5 日。这时的岁首已基本固定，季节和月名有了基本固定的关系。应该说，此时的阴阳历已经初具规模，但从甲骨文中还偶有 14 月甚至 15 月的记载等情况看，说明闰月的设置还需由经常性的观测来修订，带有较大的随机性，这是此时仍不脱观象授时形态影响的表现。

西周仍应用阴阳历。周天子有所谓“颁朔”的制度，即每年都要预先向各诸侯国颁布来年朔闰的安排，以及相应的政令。这说明西周时已将朔作为一月的开始，这是人们对有关天文数据认识能力的提高与自信的表现，是向规整化历法迈出的重要一步。而自西周到春秋时期历法发展的其他状况，则是个尚待研究的课题。

春秋末，孔丘在杞国夏人故地访得《夏小正》，这是一个分一年为 12 个月（一说 10 个月），每个月列有物候、天象、气象、农事等内容的作品，它集物候历、观象授时法和初始历法于一身。当

然,我们不能认为这就是夏代行用的历日制度,但是,它反映了大约源于夏代的一种历法传统,或者历法思想,即把一年月份的划分与特定的天象等相对应,以黄昏时若干恒星的见、伏或南中天的时日,以及北斗斗柄的指向等,作为一年中某一个月份起始的标志。这应是一种不考虑月相变化的阳历系统。大约在战国时期兴起的月令,则是《夏小正》历法系统的直接继承者,它是阴阳家的历法主张与治国方略的结合体。

春秋战国时期,阴阳历仍是历法的主流。到春秋、战国之交,一种取回归年长度为 $365\frac{1}{4}$ 日,并采用 19 年 7 闰为闰周(由此可知朔望月长度为 $29\frac{449}{940}$ 日)的历法悄然而生,这是一种关于历日安排的十分规整的、完全定量化的历法系统,可称为古四分历。从战国到西汉早期,该历法系统不断得到充实与发展,吸取阴阳家、星占家等的研究成果,把关于二十四节气、12 个月太阳所在宿次和昏旦中星,以及关于交食和五星位置的初始推算等作为历法研究的内容,奠定了中国古代历法的基础。

西汉武帝时,由邓平、落下闳等人制定了太初历(前 104),该历法经由西汉末刘歆改造而成三统历(前 7),是为我国现存第一部完整的历法。太初历(三统历)明确采用以不包含中气的月份定为闰月的方法;引进了交食周期和交点年长度的概念和具体数据;建立了以上元为历元,并以此作为推算气、朔时刻及五星位置等的共同起算点的具体方法;定出了新的五星会合周期,和五星在一个会合周期内的动态表,以及在此基础上预推五星位置的方法;引用了二十四节气太阳所在宿度表和二十八宿赤道宿度表等。这些使中国古代历法的基本形式更加明朗,其走向已不容逆转。

东汉编䜣、李梵等人编成的东汉四分历,于汉章帝元和二年

(85)颁行,在其后约百年间,该历法不断得到改进。我们现今在《续汉书·律历志》中所见的东汉四分历实际上是这一个时代的产物。该历法纠正了太初历(三统历)回归年和朔望月长度均偏大的弊病,使之恢复到古四分历的水平。同时纠正了冬至点位于牵牛初度的错误,给出了新测值,对于交食周期也做了新的探索。该历法还给出了二十四节气黄道去极度(即太阳视赤纬)、晷影长度、昼夜漏刻长度和昏旦中星的天文表格、二十八宿黄道宿度表格,及其相应的计算任一时日这些天文量的方法。从而又充实了中国古代历法的内涵。

东汉末刘洪的乾象历(206),又增加了一批新概念和新方法,如近距历元法的采用,月亮运动不均匀性改正数值表(月离表)和白道离黄道内外数值表(月行阴阳表,亦即月亮极黄纬表)的创立,黄赤道度差表的引进,回归年、朔望月、恒星月、交食周期和交点年长度新值的测定,黄白交点退行和食限概念及数据的确立,月亮近地点进动值和近点月长度的测定,具体计算任一时刻月亮距黄白交点的度距和太阳所在位置方法的建立(这实际上已经解决了交食食分大小和交食亏起方位等的计算问题),等等。至此可以说中国古代历法的气、朔、闰、晷、漏、交食、五星和恒星位置等广泛论题的计算业已齐备,而且有若干天文数据和表格的精确度已达到相当高的水准,说明中国古代的历法体系已经成熟。

魏晋南北朝时期,中国古代历法继续得到充实。这主要表现在,曹魏杨伟景初历(237)关于交食食分大小和亏起方位计算方法的明确提出,以及多历元法的采用,该法为刘宋何承天元嘉历(443)、北魏张龙祥正光历(518)和李业兴兴和历(540)所发展或继承;后秦姜岌(约384)测算太阳所在宿度的月食冲法的发明;北凉赵𢾺玄始历(412)对于闰周的改革;刘宋祖冲之将虞喜约于330年发现的岁差现象引入他的大明历(463)之中,建立了与回归年

不同的恒星年概念和数值，有助于提高日、月、五星在恒星间位置推算的精度。祖冲之还发明了多测点冬至时刻测算法，对于冬至时刻测定精度的提高有重大意义，大明历回归年长度值精度的大幅度提高，正是应用该法的直接结果，同时也为闰周的进一步改革提供了基础。大明历还最先明确给出了交点月长度值。此外，上元历元法经由祖冲之的阐述与肯定，对后世历法产生了很大的影响；北魏张龙祥正光历最先将72候引进历法之中，亦值得一提。此间，又有若干天文数据和表格的精确度达到很高的水平，也是历法继续得到充实的表征。

北齐张子信经二十余年的精心观测与潜心研究，在570年前后获得的三大发现——太阳、五星运动不均匀性，以及月亮视差对日食的影响，是历法史上划时代的事件。自此，中国古代历法在各历法课题的计算法和数学方法的应用上都发生了巨大的变革，开启了一个崭新的时代。

隋代刘焯和张胄玄将张子信的发现卓有成效地引入各自的历法——皇极历(604)和大业历(607)之中。于是有太阳和五星运动不均匀性改正表(日躔表与五星入气加减表)的出现，以及与之相应的同时考虑日、月运动不均匀性影响的定朔法，和先求五星平见，次推五星常见(加上太阳运动不均匀的改正)，再算五星定见(又加上五星运动不均匀的改正)方法的产生；有考虑五星运动不均匀现象的新型五星动态表的编订；有日应食而不食和日不应食而食表的制定，交食食分大小改正法以及从定朔时刻到食甚时刻改正法的提出；月食食限的不偏食限，必偏食限，不全食限，必全食限概念与数值的确定，等等。皇极历还有交食初亏、复圆时刻的计算，黄白道度差算法等的创新，而大业历则有太阳出入时刻表以及相当精确的五星会合周期值的测定，等等。

还要指出的是，皇极历对于五星动态、昼夜漏刻、黄赤道度差

和交食有关问题的计算，创用了等差级数法（大业历也采用此法于有关论题的计算），在应用日躔、月离和月亮极黄纬表时更创用了等间距二次差内插法。而在此之前，历法的有关计算均仅限于采用一次内插法，即把有关天文量在特定两个基准点之间的数量变化均视为线性的变化。等差级数法和二次差内插法的应用，则是将上述数量变化视为二次曲线的变化。这不但在数学上较一次内插法先进，而且从天文与物理学的角度考察，它更贴近上述数量变化的客观状况，也就是说，它能更客观和准确地反映上述的数量变化。显然，等差级数法和二次差内插法的创用，是随着人们对有关天文量测算精度的提高，亦即对日、月、五星等运动规律认识的深化而提出的，它们是中国古代代数学天文学体系发展到崭新阶段的又一重要标志。

及至唐代，这种改革和创新的势头仍在继续，这首先反映在唐初定朔法的正式颁用。在取得重大进展的天文学面前，传统的采用平朔法的观念，势在必改，经由傅仁均戊寅历（619）和李淳风麟德历（665）的先后努力，定朔法遂成定式。麟德历还在取消闰周法和统一各天文数据的分母等方面首获成功。其次，一行大衍历（728）首创不等间距二次差内插法，用于日躔表和食差表的计算；对于五星运动位置的推算，从五星动态表到五星运动不均匀性改正表均做了重大变革，并提出了五星运动轨道面同黄道面之间有一定夹角，五星近日点进动的概念与具体数据；更为重要的是，大衍历建立了一套推求九服晷长、昼夜漏刻长度和食差的近似算法，这是力图打破前代历法相关数值的推算仅限于某一地点有效的局面，使历法适用于全国各地的重要尝试，从而大大扩展了历法的普适性。再次，徐昂宣明历（821）首创日食时差、气差、刻差和加差算法，规范了月亮视差对日食食分和日食食时影响的方法，也对后世历法产生很大影响。

自唐郭献之五纪历(762)开始,出现了将历表公式化的最初尝试。所谓历表公式化,是不再沿用传统的先给出历表,再应用一次或二次差内插法进行计算的方法,而是给出统一的公式,直接依公式进行有关计算的方法。五纪历是将日食食差表及其算法公式化了,虽然其设定的算式还仅仅是一次函数式。曹士芀符天历(约780)沿着这条思路取得了重大的进展,在计算太阳运动不均匀性改正值时,首创了二次函数算式。接着,边冈在崇玄历(892)中全力加以开拓,除对太阳运动不均匀性改正值的计算给出与符天历不同的二次函数算式外,还给出了计算黄赤道度差、月亮极黄纬、日食时差改正、交食初亏与复圆时刻等的二次函数公式,对于晷长的计算则首创了三次函数算式,对于太阳视赤纬和昼夜漏刻长度的推算更创用了四次函数算式,从而形成了以高次函数法替代历表及其表格计算法的坦荡之势。

从数学上看,高次函数法的应用无疑是一大进步,而且它具有形式简明、计算便捷以及保持较高精确度的特征。由于历表给出的是一组基准点的天文量(一般由实测取得),不论表格计算法采用的是一次或二次差内插法,都不能改变历表所描述的天文量整体变化的折线(或曲线)存在诸多奇点的情况,即诸多基准点本身就成了奇点。从天文与物理学的角度看,这不能不说是一大缺憾。而高次函数法的采用,是将天文量的整体变化用一个算式加以描述,这就克服了对于特定天文量的整体描述存在诸多奇点的弊病,使对日、月、五星运动等的描述更富数理意义。所以,历表公式化或者说高次函数法的采用,把中国古代代数学天文学体系推进到一个新的高度。

宋元时期,中国古代历法发展的最主要特征是精确化,一系列天文数据和表格的总体精度均达到了高峰,高次函数法得到更普遍的应用,而且算式的精度也有所提高。宋行古崇天历(1024)

还首创了黄白和赤白度差的公式计算法。周琮明天历(1064)则是历代历法中公式化程度最高者,包括日、月、五星中心差,黄赤、黄白和赤白道度差、晷长、昼夜漏刻长度、太阳视赤纬值、交食时差、气差和刻差、交食初亏和复圆时刻等,均取二次至四次函数算法,其中对于晷长的计算,还创用了五次函数算式,是为中国古代历法中采用的最高次函数式。姚舜辅纪元历(1106)所创用的各类算式多具有形式更简明、精度又较高的特点。郭守敬、王恂等人的授时历(1281),更把三次差内插法应用于日、月、五星运动诸课题的计算,该历法还采用了类似球面三角法的弧矢割圆术等,于黄赤、赤白道度差、太阳视赤纬与昼夜漏刻长度等的计算,同时也应用高次函数法于交食有关问题的计算,继承并发展了前代历算家的有关数学方法,集于授时历之中,真可谓异彩纷呈。

授时历的另一项重要改革,是采用实测历元法,即由实测得到某年冬至时刻,以及各有关天文量与该冬至时刻的时距(或度距),由此可得有关天文量的各不相同的起算点,从而由传统的上元历元法的弊病中解脱出来,这有助于提高有关历法问题计算的精确度。当然,这项改革是吸取了南宋杨忠辅统天历(1199)历元法的基本模式(该历元法实际上就是实测历元法,但却虚设了一个积年数不大的“上元”)。这里还要顺便指出,唐傅仁均戊寅历曾一度采用实测历元法,但不敌上元法论者的攻击,不得不回复到上元法,而曹士蒍符天历采取的则是近距历元法。授时历终于成功地应用了实测历元法,实现了前代部分历家的历元理论。

在测量方法上,周琮、郭守敬等先后发展了刘宋祖冲之的冬至时刻测算法,为法加精加详。对于冬至时太阳所在宿度的测量,姚舜辅有金星偕日出没法的新创,郭守敬又添加木星偕日出没法,且有月离宿次法的发明。这些都为冬至时刻或冬至时太阳所在宿度和岁差值精度的提高创造了条件。

宋元时期是中国古代历法发展的高峰。但自明代开始，却出现了停滞不前以致倒退的现象。有明一代，一直沿用授时历，只是改名为大统历而已。其间偶有人提出改历的建议，但均因“祖制不可变”而被否定。天文官员墨守成规，久而久之，只能穷于应付日常历日的推算，以致屡屡发生误推日食等天象的事件。对于民间学者，统治者则采取禁习天文历法的愚蠢政策。朝野一潭死水，致使传统历法几成绝学。不过，这一时期来自阿拉伯的回回历法受到重视，与大统历并行使用，可是回回历法也仅为少数天文官员所了解。明代晚期，虽有邢云路、朱载堉等人试图复兴传统历法，但却面临由东来传教的耶稣会士传入的天文历法的挑战，自此开始了中西历法论争与融汇的新时期。

明崇祯二至七年(1629—1634)，由徐光启等人主持，耶稣会士龙华民、邓玉函、汤若望等人参与编撰的《崇祯历书》，是较系统较全面介绍西方经典天文学的重大成果。该书保留了中国传统历法的某些形式特征，但却是以西法为基础，亦即是以西方几何学天文学体系为本质特征的历法。明代未及施行该历法而朝亡。清代始立，汤若望将《崇祯历书》改为《西洋新法历书》上献，随即得以颁行。清代虽有历家试图重振传统历法，但面临传统历法长期停滞的颓势和西方天文学长足进步的现实。大多数学者改而认真学习与研究传入的西方天文学知识，并潜心挖掘、整理传统历法的遗产。随着近现代天文学的兴起，中国古代历法相形见绌，但它作为古代科学的一朵奇葩而被载入史册，我们自然不会也不应忘记历家历代的贡献与功绩。

下面我们将转而介绍中国古代历法的历表及其表格计算法。关于中国古代历法诸多天文数据自粗及精的发展，中国古代历法理论的建立与阐发，本书不拟讨论，请读者分别参阅《中国天文学史大系》的《中国古代天体测量学及天文仪器》和《中国古代天文学思想》等卷。

第二节 五星动态表

一、西汉至北魏时期的五星动态表

关于五星在一个会合周期内视运动状况的完整记述首见于刘歆的三统历（前 7）中，它大约也就是邓平、落下闳太初历（前 104）关于五星动态的描述。以木星为例，其术文曰：

> 木，星始见，去日半次。顺，日行十一分度二，百二十一日。始留，二十五日而旋逆，日行七分度一，八十四日。复留，二十四日三分而旋。复顺，日行十一分度二，百一十一日有百八十二万八千三百六十二分而伏。凡见三百六十五日有百八十二万八千三百六十五分，除逆，定行星三十度百六十六万一千二百八十六分。凡见一岁，行一次而后伏。日行不盈十一（一为衍文）分度一。伏三十三日三百三十三万四千七百三十七分。行星三度百六十七万三千四百五十一分。一见，三百九十八日五百一十六万三千一百二分，行星三十三度三百三十三万四千七百三十七分。通其率，故曰日行千七百二十八分度之百四十五。①

这是以文字描述的方式给出了木星在一个会合周期内的动态。它实际上又可示如表 1—1。

表 1—1 中，[　]内者在上引术文中虽并未列出，但其意当如

① 《汉书・律历志下》。

此。由伏段$\frac{A\times B}{A}=\frac{1}{10.361293}$,可知“不盈十一分度一”,应为“不盈十分度一”之误。欲求木星晨始见后第 n 日木星的行度(在恒星间自西向东运行的度值),可由上述历表依一次差内插法求得。设 $n=300$ 日,由表 1－1“每段日数”可知,其时当在“复留”以后 $45\frac{7308708}{7308711}$日,而此段内木星每日行$\frac{2}{11}$度,前此,木星已行(22—12)度,故木星的行度应等于 $18.36\left(=22-12+45\frac{7308708}{7308711}\times\frac{2}{11}\right)$度。三统历(太初历)关于土、火二星动态的描述方式与上引木星动态完全相同,它们均可称为 6 段分法。而对于金、水二星动态的描述方式则有所不同,以金星为例,其术文曰:

> 金,晨始见,去日半次。逆,日行二分度一,六日。始留,八日而旋。始顺,日行四十六分度三十三,四十六日。顺,疾,日行一度九十二分度十五,百八十四日而伏。凡见二百四十四日,除逆,定行星二百四十四度。伏,日行一度九十二分度三十三有奇。伏八十三日,行星百一十三度四百三十六万五千二百二十分。凡晨见、伏三百二十七日,行星三百五十七度四百三十六万五千二百二十分。夕始见,去日半次。顺,日行一度九十二分度十五,百八十一日百七分日四十五。顺,迟,日行四十六分度三十三,四十六日。始留,七日百七分日六十二分而旋。逆,日行二分度一,六日而伏。凡见二百四十一日,除逆,定行星二百四十一度。伏,逆,日行八分度七有奇。伏十六日百二十九万五千三百五十二分,行星十四度三百六万九千八百六十八分。一凡夕见、伏,二百五十七日百二十九万五千三百五十二分,行星二百

二十六度六百九十万七千四百六十九分。一复，五百八十四日百二十九万五千三百五十二分。行星亦如之，故曰日行一度。①

表 1—1 三统历(太初历)木星动态表

段名	每段日数(A)	每日行度(B)	每段行度(A×B)
晨始见后顺	121	$\frac{2}{11}$	[22]
始留	25	0	[0]
逆	84	$-\frac{1}{7}$	[−12]
复留	$24\frac{3}{7308711}$	0	[0]
复顺	$111\frac{1828362}{7308711}$	$\frac{2}{11}$	$\left[20\frac{1661286}{7308711}\right]$
伏	$33\frac{3334737}{7308711}$	不盈$\frac{1}{11}$，应为$\frac{1}{10.3613}$、不盈$\frac{1}{10}$	$3\frac{1673451}{7308711}$
一见	一会合日数(∑A) $398\frac{5163102}{7308711}$	平均每日行度$\frac{145}{1728}$	一会合行度(∑A·B) $33\frac{3334737}{7308711}$

依此，实际上亦可示如表 1—2。

表 1—2 中，[ ]内者在上引术文中亦未列出，但其意当如此。三统历亦将水星动态分为如表 1—2 所示的 10 段。木、土、火三星动态表与金、水二星动态表的差异是前者在一会合周期内只有晨见，而后者则有晨见和夕见，这是因为前者为外行星，而后者为内行星所致。此外，后者将顺行分为两段，其速度分为

① 《汉书·律历志下》。

两等，而前者仅取一等。至于欲求晨始见后第 n 日金星的行度，则也用一次差内插法求取。设 $n=400$ 日，由表 1－2 可知，其时应在“夕始见顺”以后 73 日，而此段金星的每日行度为 $1\frac{15}{92}$，前此，金星已行 $357\frac{4365220}{9977337}$ 度，故金星的行度应等于 442.34 $\left(=357\frac{4365220}{9977337}+73\times1\frac{15}{92}\right)$度。

表 1－2　三统历(太初历)金星动态表

段名	每段日数(A)	每日行度(B)	每段行度($A\times B$)
晨始见后逆	6	$-\frac{1}{2}$	[－3]
始留	8	0	[0]
始顺	46	$\frac{33}{46}$	[33]
顺，疾	184($\sum$244)	$1\frac{15}{92}$	[214]($\sum$244)
伏	83	$1\frac{33}{92}$有奇，应为 $1\frac{33.74}{92}$	$113\frac{4365220}{9977337}$
晨见、伏	327		$357\frac{4365220}{9977337}$
夕始见顺	$181\frac{45}{107}$	$1\frac{15}{92}$	[211]
顺，迟	46	$\frac{33}{46}$	[33]
始留	$7\frac{62}{107}$	0	[0]
逆	6($\sum$241)	$-\frac{1}{2}$	[－3]($\sum$241)
伏，逆	$16\frac{1295352}{9977337}$	$\left[\frac{81.61}{92}\right]$	$-14\frac{3069868}{9977337}$
夕见、伏	$257\frac{1295352}{9977337}$		$226\frac{6907469}{9977337}$
一复	$584\frac{1295352}{9977337}$	1	$584\frac{1295352}{9977337}$

编䜣东汉四分历(85)的五星动态表亦取文字描述法,但其详细的程度已较三统历(太初历)有所提高。东汉四分历五星动态表均以"晨伏"作为起点,即把三统历(太初历)五星动态表中的"伏"均一分为二,辟为2段,以"伏"的中点作为起点。此外,对于木、火二星的顺行段亦分为2段,其运行速度也分为二等,称第二等为"微迟"等,即取10段分法。而对于土星顺行速度仍取一等,故为8段分法。而对于金星的顺行段更分为3段,其运行速度分为三等,称后二等为"疾"、"益疾"或"迟"、"益迟"。[①] 即东汉四分历的金星动态表实取14段分法,而对于水星顺行段的速度仍分二等,故其动态表取12段分法。这些改进自然较为接近五星视运动的实际情况。

东汉四分历的五星动态表描述法对后世历家产生了很大的影响,汉末刘洪乾象历(206)和曹魏杨伟景初历(237)、刘宋何承天元嘉历(443)的五星动态表均取东汉四分历的描述和分段法。而祖冲之大明历(463)、北魏张龙祥正光历(518)、李业兴兴和历(540)描述法亦与三统历相同,而分段法则取三统历(太初历)和东汉四分历五星动态表的中间形式。这些五星动态表的另一个共同点是每段内行星的行度都是相同的。当然,这些历法对于各段日数和每日行度的具体数据的取值则有所不同。

二、隋和唐初的五星动态表

到隋代刘焯皇极历(604)和张胄玄大业历(607)五星动态表虽仍取文字描述的方式,但在内涵上却发生了重大的变革。

如皇极历木星动态表的术文曰:

---

① 《续汉书・律历志下》。

见，初日行万一千八百一十八分，日益迟七十分，百一十日行十八度、分四万七百三十八而留。二十八日乃逆，日退六千四百三十六分，八十七日退十二度、分二百四。又留二十八日。初日行四千一百八十八分，日益疾七十分，百一十日亦行十八度、分四万七百三十八而伏。[1]

这里虽然仍取三统历的6段分法，但对于顺行不再取匀速运动的描述法，而是以一日为单位，每一日的运行速度按等差级数递减(或递增)的描述法。这是刘焯五星动态表的一大特征，是对前代五星动态表的一大改进。在计算木星见后或留后第 n 日的行度时，皇极历则采取了等差级数求和的公式：

木星见后第 n 日的行度

$$=\frac{11818n-\dfrac{70[1+(n-1)](n-1)}{2}}{46644}=\frac{11853n-35n^2}{46644}$$

木星留后第 n 日的行度

$$=\frac{4188n+\dfrac{70[1+(n-1)](n-1)}{2}}{46644}=\frac{4153n+35n^2}{46644}$$

式中：$n\leqslant110$，设 $n=110$ 代入上二式，均正得 $18\frac{40738}{46644}$，与上术文相等。

对于土星，刘焯皇极历仍沿用三统历的6段分法，并把每一段内土星的行度视为匀速运动，这大约是土星行度较小，行度的变化也较小的缘故，所以未做如木星那样的改革。

---

① 《隋书・律历志下》。

又如，刘焯皇极历关于火星动态表的术文曰：

见，初在冬至，则二百三十六日行百五十八度，以后日度随其日数增损各一：尽三十日，一日半(半应为衍文)损一；又八十六日，二日损一；复三十八日，同；又十五日，三日损一；复十二日，同；又三十九日，三日增一，又二十四日，二日增一；又五十八日，一日增一；复三十三日，同；又三十日，二日损一，还终至冬至，二百三十六日行百五十八度。其立春尽春分，夏至尽立夏(应为立秋)八日减一日；春分至立夏，减六日；立秋至秋分，减五度，各其初行日及度数。白露至寒露，初日行半度，四十日行二十度。以其残日及度，计充前数。皆差行，日益迟二十分，各尽其日度乃迟，初日行分二万二千六百六十九，日益迟一百一十分，六十一日行二十五度、分万五千四百九。初减度五者，于此初日加分三千八百二十三、篾十七，以迟日为母，尽其迟日行三十度，分同，而留十三日。[①]

这是关于火星晨见以后顺行至留的动态描述。刘焯将火星晨见后初日运行速度的大小与晨见发生之时刻同冬至时刻之间时距的多少相联系，即认为火星晨见初日的运行速度随时日的不同(亦即黄经的不同)是各异的，其状况可示如表1—3。

上术文中“尽三十日，一日半损一”，若依之，则据上法推至365日时，火星行度为$\frac{168}{246}$度，不与上术文中“还终至冬至，二百三十六日行百五十八度”吻合，若删去“半”字，则相吻合，故知其“半”字为衍文。

① 《隋书·律历志下》。

表 1—3　皇极历火星晨见在不同时日的速度表

日期	冬至初日	1日	…	30日	32日	34日	…	116日	118日	120日
每日行度	$\frac{158}{236}$	$\frac{157}{235}$	…	$\frac{128}{206}$	$\frac{127}{205}$	$\frac{126}{204}$	…	$\frac{85}{163}$	$\frac{84}{162}$	$\frac{83}{161}$
日期	…	154日	157日	160日	…	169日	172日	175日	…	181日
每日行度	…	$\frac{66}{144}$	$\frac{65}{143}$	$\frac{64}{142}$	…	$\frac{61}{139}$	$\frac{60}{138}$	$\frac{59}{137}$	…	$\frac{57}{135}$
日期	184日	186日	…	220日	222日	224日	…	244日	245日	246日
每日行度	$\frac{58}{136}$	$\frac{59}{137}$	…	$\frac{70}{148}$	$\frac{71}{149}$	$\frac{72}{150}$	…	$\frac{82}{160}$	$\frac{83}{161}$	$\frac{84}{162}$
日期	…	302日	303日	304日	…	335日	337日	339日	…	365日
每日行度	…	$\frac{140}{218}$	$\frac{141}{219}$	$\frac{142}{220}$	…	$\frac{173}{251}$	$\frac{172}{250}$	$\frac{171}{249}$	…	$\frac{158}{236}$

这实际上是一份在一年(365日)内火星晨见初日运动速度的表格。在此基础上,刘焯又对以下三个时段火星晨见初日运动的速度作出修正:

其一,立春到春分和夏至到立秋期间,内中某日求火星晨见运动速度时,需以该日与冬至的时距除以8,所得减该日与冬至的时距,以此日作为初日并作为引数由上述365日表格查得该日火星晨见运动速度。

其二,春分到立夏时,欲求内中某日火星晨见运动速度,需以该日与冬至的时距减去6日,以此作为初日,并以之为引数由上述365日表格查得该日火星晨见运动速度。

其三,白露到寒露时,火星晨见初日运动速度均为半度。

在求得火星晨见初日运动速度后,火星的动态先是每日运动

速度递减 20 分，及至其运动速度为 22669 分之后，每日运动速度则递减 110 分，这种状态持续 61 日，火星运行 $25\frac{15409}{46644}$ $\left(=\frac{22669\times61-\frac{60\times61\times110}{2}}{46644}\right)$度。第 61 日火星的运行速度为 16069 分$=\frac{16069}{46644}$度$=0.34$度。此后，火星留而不行，计 13 日。如果火星晨见初日运动速度就小于 22669 分，火星运动速度即以每日 110 分递减，减至 16069 分后亦留而不行 13 日。当火星晨见在立秋到秋分时，火星的行度需先减去 5 度。而火星在此期间某日的初行度可以该日与冬至的时距为引数，由 365 日表格查得。其后亦先每日运动速度递减 20 分，但及至其运动速度为$26492\frac{17}{61}$分时，每日运动速度开始递减 110 分，这种状态亦持续 61 日，但火星运行 $30\frac{15409}{46644}$度(算法与上式相似)。

在留以后火星的动态，刘焯皇极历又有术文曰：

> 前减日分于二留，乃逆，日退分万二千五百二十六，六十三日退十六度、分四万二千八百三十四。又留十三日而行，初日万六千六十九，日益疾百一十分，六十一日行二十五度、分万五千四百九。立秋尽秋分，增行度五，加初日分同前。更疾，在冬至则二百一十三日行百三十五度；尽三十六日，一日损一；又二十日，二日损一；复二十四日，同；又五十四日，三日（日）（增）[损]一；又十二日，二日增一[半]；又四十二日，一日增一；又十四日，一日增一半；又十二日，[一日]增一；复四十五日，同；又一百六日，二日损一，亦终冬至二百一十三日，

行百三十五度。前增行度五者，于此亦减五度，为疾日及数。其立夏尽夏至，亦日行半度，六十日行三十度。夏至尽立秋，亦初日行半度，四十日行二十度。其残亦计充如前。皆差行，日益疾二十分，备尽其日度而伏。①

这是说，在火星前留以后，火星开始逆行，每日退行 12526 分，63 日退行 $16\frac{42834}{46644}\left(=63\times\frac{12526}{46644}\right)$度；此后又留 13 日；此后又开始顺行，初日速度为 16069 分，随后 61 日间，每日行度递增 110 分，共运行$25\frac{15409}{46644}\left(=\frac{16069\times61+\frac{61\times60\times110}{2}}{46644}\right)$度，此时火星每日运动速度应等于 22669 分；如果后留发生在立秋到秋分期间，后留之后顺行的初日速度应为$\left(16069+3823\frac{17}{61}\right)$分，随后 61 日间，每日行度亦递增 110 分，故共运行 $30\frac{15409}{46644}$ $\left(=\frac{19892\frac{17}{61}\times61+\frac{61\times60\times110}{2}}{46644}\right)$度，此时火星每日运动速度应等于 $26492\frac{17}{61}$分。

依上术文之意，刘焯又指出，后留之后火星运行速度从每日递增 110 分到每日递增 20 分的转折点当日的运行速度是随时日的不同（亦即黄经不同）而各异的，其状况可示如表 1－4。

上术文需做如上所示的修订，才能得出此结果，否则 365 日时的火星行度必不与$\frac{135}{213}$度相吻合。

---

① 《隋书·律历志下》。

表 1—4 皇极历火星后留之后运行速度从慢到快之日在不同时日的速度表

日期	冬至初日	1 日	…	36 日	38 日	40 日	…	56 日	58 日
每日行度	$\frac{135}{213}$	$\frac{134}{212}$	…	$\frac{99}{177}$	$\frac{98}{176}$	$\frac{97}{175}$	…	$\frac{89}{167}$	$\frac{88}{166}$
日期	…	80 日	83 日	86 日	…	134 日	136 日	138 日	…
每日行度	…	$\frac{77}{155}$	$\frac{76}{154}$	$\frac{75}{153}$	…	$\frac{59}{137}$	$\frac{60.5}{138.5}$	$\frac{62}{140}$	…
日期	146 日	147 日	…	188 日	189 日	190 日	…	202 日	203 日
每日行度	$\frac{68}{146}$	$\frac{69}{147}$	…	$\frac{110}{188}$	$\frac{111.5}{189.5}$	$\frac{113}{191}$	…	$\frac{131}{209}$	$\frac{132}{210}$
日期	…	214 日	215 日	…	259 日	262 日	264 日	…	365 日
每日行度	…	$\frac{143}{221}$	$\frac{144}{222}$	…	$\frac{188}{266}$	$\frac{187}{265}$	$\frac{186}{264}$	…	$\frac{135}{213}$

与上述一年内火星晨见初日运动速度的表格相似，这是一份在一年(365 日)内，火星后留后运动递增速度发生变化之日的火星运动速度表格。当火星后留初日在立秋到秋分期间，后留之后顺行速度由慢变快时，火星的行度需先减去 5 度。当后留之后 61 日，火星当日运动速度大于 22669 分$\left(\text{对于立秋到秋分之间，大于 }26492\frac{17}{61}\text{分}\right)$时，每日递增 110 分的日数则大于 61 日，增多的日数等于$\left[\text{当日运动速度}-22669\left(\text{或 }26492\frac{17}{61}\right)/110\right]$；小于 22669 分$\left(\text{对立秋到秋分之间，小于 }22492\frac{17}{61}\right)$时，每日递增 110 分的日数则小于 61 日，减少的日数等于$\left[22669\left(\text{或 }26492\frac{17}{61}\right)-\text{当日运动速

度]/110。而每日递增20分,则均在火星运动速度相同于当日运动速度之后起算。

如上所述,刘焯皇极历火星动态表虽然仍采用与东汉四分历相同的10段分法,但它又是随火星晨见东方的时日以及火星后留之后顺行速度由慢变快时日不同而变化的动态表。其变化是指从火星晨见到前留以及从火星后留到伏的时段内,火星运动速度每日递减(或递增)110分和每日递减(或递增)20分的日数各不相同。而火星前、后留的日数和逆行的日数及速度则是不变的。对于金星和水星动态表,刘焯皇极历也给出形式与此相类似的描述。

张胄玄大业历的五星动态表与刘焯皇极历取相同的形式,当然五星各时段的日数和速度各不相同。张胄玄和刘焯引进了北齐张子信关于行星运动不均匀性发现对火、金、水星动态表做如此繁杂的改动,这种思路对唐初历法产生了很大的影响。有人认为,这一思路的天文意义可以用行星运动的地球改正来解释①,这是一种值得重视的见解。

唐初傅仁均戊寅历(607)的五星动态表的形式与皇极历、大业历相同,但五星各时段的日数和速度也有所修订。

唐代李淳风麟德历(665)五星动态表的形式亦继承皇极历、大业历,但又有所改进。如对于火星逆行的描述也依前留所处时日的不同给出不同的运行速度,其术曰:

> 前留,十三日。旋退,西行。入冬至初日,率六十三日退二十一度,乃四日益度一。小寒一日,率六十三日退二十六度,乃三日半损度一。立春之日,平,毕启蛰,率六十三日退十七度,乃二日益日、度各一。雨水八日,

① 刘金沂:《麟德历行星运动计算法》,《自然科学史研究》,1985年,第2期。

平，毕气尽，率六十七日退二十一度。入春分，每气损日、度各一。大暑初日，平，毕气尽，率五十八日退十二度。立秋初日，平，毕气尽，率五十七日退十一度，乃(二)[六]日益(日)一。寒露九日，平，毕气尽，率六十六日退二十度，乃二日损一。霜降六日，平，毕气尽，率六十三日退十七度，乃三日益一。立冬十(一)[二]日，平，毕气尽，率六十七日退二十一度，乃(二)[七]日[半]损一。入冬至，复初。①

依之可作表1—5(上术文需作必要校正)。

李淳风麟德历又指出火星后留时日的长短亦与后留发生在一年内不同的时日有关：

后留：冬至初，留十三日，乃二日半益一。大寒初日，平，毕气尽，留二十五日，乃二日半损日一。雨水初日，留十三日，乃三日益一。清明初日，留二十三日，乃日损一。清明十日，平，毕处暑，留十三日，乃二日损一。秋分十一日，无留。乃每日益一。霜降初日，留十九日，乃三日损一。立冬[三日，平]毕大雪，留十三日。②

依之可作表1—6。

这些描述也都是继承刘焯、张胄玄的思路，对火星前留后逆行的状况和后留时日长短加进某种改正值，试图反映火星动态的真实情形。

---

① 《新唐书·历志二》。

② 《新唐书·历志二》。术文中[三日，平]，依《旧唐书·历志二》校改。

表 1—5　麟德历火星前留后逆行在不同时日的速度表

日期	冬至初日	冬至后4日	冬至后8日	…	冬至后16日(小寒后1日)	小寒后4.5日	小寒后8日	…
每日行度	$\frac{21}{63}$	$\frac{22}{63}$	$\frac{23}{63}$	…	$\frac{26}{63}$	$\frac{25}{63}$	$\frac{24}{63}$	…
日期	小寒后33日(立春后3日)到雨水初日		雨水后2日	雨水后4日	雨水后6日	雨水后8日到雨水末日	春分	清明
每日行度	$\frac{17}{63}$		$\frac{18}{64}$	$\frac{19}{65}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{21}{67}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{19}{65}$
日期	谷雨	立夏	小满	芒种	夏至	小暑	大暑	立秋
每日行度	$\frac{18}{64}$	$\frac{17}{63}$	$\frac{16}{62}$	$\frac{15}{61}$	$\frac{14}{60}$	$\frac{13}{59}$	$\frac{12}{58}$	$\frac{11}{57}$
日期	处暑后6日	处暑后12日	…	处暑后54日(寒露后9日)至霜降初日		霜降后2日	霜降后4日	霜降后6日到立冬初日
每日行度	$\frac{12}{58}$	$\frac{13}{59}$	…	$\frac{20}{66}$		$\frac{19}{63}$	$\frac{18}{63}$	$\frac{17}{63}$
日期	立冬后3日	立冬后6日	立冬后9日	立冬后12日到小雪初日	小雪后7.5日	小雪后15日	小雪后22.5日	小雪后3日(冬至初日)
每日行度	$\frac{18}{64}$	$\frac{19}{65}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{21}{67}$	$\frac{21}{66}$	$\frac{21}{65}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{21}{63}$

表 1—6　麟德历火星不同时日后留日数表

日期	冬至初日	冬至后2.5日	冬至后5日	…	冬至后30日(大寒初日)到立春初日	立春后2.5日	立春后5日	…	立春后30日(雨水初日)	雨水后3日
后留日数	13	14	15	…	25	24	23	…	13	14
日期	雨水后6日	…	雨水后30日(清明初日)	清明后1日	清明后2日	…	清明后10日到白露初日	白露后2日	白露后4日	…
后留日数	15	…	23	22	21	…	13	12	11	…
日期	白露后26日(秋分后11日)	秋分后12日	秋分后13日	…	秋分后30日(霜降初日)	霜降后3日	霜降后6日	…	霜降后18日(立冬后3日)到冬至初日	
后留日数	0	1	2	…	19	18	17	…	13	

在刘焯、张胄玄之前各历法的五星动态表，是在观测五星若干个会合周期的动态之后，给出的一个会合周期内固定的不同时段的平均运行状况，可称之为平均型的五星动态表。而自刘焯、张胄玄到李淳风，则对之做了重大的变革，除了对五星晨见的时日做入气加减的改正之外（见本章第九节），还把火、金、水三星平均型的动态表改造成变动型的动态表，即在一个会合周期内各时段的长短是不固定的。这一尝试应有助于对行星真实动态的描述，但却造成十分繁杂的状况。

三、唐大衍历及其后的五星动态表

唐一行大衍历（728）五星动态表在《旧唐书·历志三》和《新

唐书·历志四下》中均有记载。有趣的是，后者仍取文字描述的形式，而前者则采取表格描述的形式，是为中国古代最早见的表格式五星动态表，两者的内涵完全一致。自大衍历以后除了徐承嗣的正元历外（该历仍用文字描述法，其内涵则与李淳风麟德历大同小异），所有历法均取表格方式给出五星动态表。

更为重要的是，一行开启了与刘焯、张胄玄至李淳风完全不同的构思，以解决五星运动不均匀性对五星动态的影响。现在我们先来讨论大衍历及其后各历法五星动态表表格横向栏的设置情况。

木星横向栏有 8、10、12、14 段四种分法。

大衍历为 8 段分法："合后伏"、"前顺"、"前留"、"前退"、"后退"、"后留"、"后顺"、"合前伏"。郭献之五纪历(762)同此。

崇玄历为 10 段分法，它将大衍历的"前顺"与"后顺"各拆为两段："前疾"和"前迟"，"后迟"和"后疾"。此外，又将大衍历的"合后伏"和"合前伏"分别改作"晨见"和"夕合"[①]。北宋应天、乾元和仪天三历同此。

钦天历为 12 段分法，它是在崇玄历分段法基础上，又将"前退"和"后退"各拆为两段："退迟"与"退疾"，"退疾"与"退迟"[②]。

崇天历为 14 段分法，它将大衍历的"前顺"和"后顺"各拆为四段："前疾初"、"前疾末"、"前迟初"、"前迟末"和"后退初"、"后退末"、"后疾初"、"后疾末"[③]。北宋观天历和纪元历，南宋统天历、开禧历和成天历，金重修大明历，元庚午历和授时历均同此。

明天历亦为 12 段分法，它将大衍历的"前顺"和"后顺"各拆

---

① 《新唐书·历志六下》。

② 《新五代史·司天考一》。

③ 《宋史·律历志六》。

为三段:“前二”、“前三”、“前四”和“后四”、“后三”、“后二”[①],南宋统元、乾道、淳熙、会元历均同此,只是将段名改作“晨疾”、“晨次疾”、“晨迟”和“夕迟”、“夕次疾”、“夕疾”[②]。

火星横向栏有10、12、14、16、18段五种分法。

大衍历为10段分法:“合后伏”、“前疾”、“前迟”、“前留”、“前退”、“后退”、“后留”、“后迟”、“后疾”、“合前伏”。崇玄历对于木星的10段分法即与此相当。

五纪历为12段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“后迟”和“后疾”分别辟为三段:“前疾”、“前次疾”和“前迟”;“后迟”、“后次疾”和“后疾”[③]。明天历对于木星的12段分法即与此相当。唐末崇玄历,北宋应天历、乾元历、仪天历火星分段法均同此。

钦天历为16段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“前退”和“后退”、“后迟”和“后疾”均各分为两段:“前二”、“前三”;“前四”、“前五”;“退迟”、“退疾”;“退疾”、“退迟”;“后五”、“后四”;“后三”、“后二”[④]。

崇天历为18段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“后迟”和“后疾”均各分为三段:“前疾初”、“前疾末”、“前次疾初”;“前次疾末”、“前迟初”、“前迟末”;“后迟初”、“后迟末”、“后次疾初”;“后次疾末”、“后疾初”、“后疾末”[⑤]。此后各历法除了明天历外,均同此。

明天历为14段分法,它与钦天历稍异处是保留了大衍历的“前退”和“后退”两段,不再各辟为两段。

---

① 《宋史·律历志八》。

② 《宋史·律历志十六》。

③ 《新唐书·历志五》。

④ 《新五代史·司天考一》。

⑤ 《宋史·律历志六》。

土星横向栏的分法则有 8、10、12 段三种。

大衍历分为 8 段，其法同大衍历木星。五纪历亦与之相同。

崇玄历分为 10 段，其法同崇玄历木星。北宋应天历、乾道历、仪天历亦与之相同。

钦天历分为 12 段，其法同钦天历木星。

崇天历亦为 12 段分法，它是将大衍历“前顺”和“后顺”各辟为三段：“前疾”、“前次疾”、“前迟”和“后迟”、“后次疾”、“后疾”[①]。此后各历法无一例外均取此法。

金星横向栏有 14、18、20 段三种分法。

大衍历取 14 段分法：“晨合后伏”、“夕疾行”、“夕平行”、“夕迟行”、“夕留”、“夕退”、“夕合前伏”、“夕合后伏”、“晨退”、“晨留”、“晨迟行”、“晨平行”、“晨疾行”、“晨合前伏”。五纪、崇玄、应天、乾元、仪天诸历亦同此法。

钦天历取 18 段分法，它把大衍历的“夕疾行”、“夕平行”和“夕迟行”，“晨迟行”、“晨平行”和“晨疾行”分别辟为四段：“顺疾”、“次疾”、“次迟”和“顺迟”，“顺迟”、“次迟”、“次疾”和“顺疾”；又把大衍历的“夕退”和“晨退”分别辟为两段：“退迟”、“退疾”和“退疾”、“退迟”[②]。

崇天历取 20 段分法，它把大衍历的“夕疾行”、“夕平行”和“夕迟行”、“晨迟行”、“晨平行”和“晨疾行”分别分为六段：“夕疾初”、“夕疾末”、“夕次疾初”、“夕次疾末”、“夕迟初”和“夕迟末”，“晨迟初”、“晨迟末”、“晨次疾初”、“晨次疾末”、“晨疾初”和“晨疾末”[③]。此后各历法亦无一例外均用此法。

水星横向栏有 8、10、12 段三种分法。

---

① 《宋史・律历志六》。

② 《新五代史・司天考一》。

③ 《宋史・律历志六》。

大衍历为12段分法:"晨合后伏"、"夕疾行"、"夕平行"、"夕迟行"、"夕留"、"夕合前伏"、"夕合后伏"、"晨留"、"晨迟行"、"晨平行"、"晨疾行"、"晨合前伏"。五纪历同此。

崇玄历为8段分法,它将大衍历"夕疾行"、"夕平行"和"夕迟行","晨迟行"、"晨平行"和"晨疾行"分别合而为一,称"夕顺"和"晨顺"①。明天历则同此法。

钦天历为10段分法,它是将崇玄历的"夕顺"和"晨顺"分别辟为两段:"顺疾"、"顺迟"和"顺迟"、"顺疾"。此后各历法除明天历外,均取此法,只是段名分别改为"夕疾"、"夕迟"和"晨迟"、"晨疾"②。

综上所述,大衍历木星和土星8段法、金星14段法和水星12段法都对五纪历产生了直接的影响。五纪历则创火星12段法。崇玄历则创木星和土星10段法及水星8段法。钦天历则创水星10段法,对后世历法(除明天历外)产生了深远的影响,其木星和土星12段法、火星16段法和金星18段法均将运行的速度分为两个档次,是为鲜明的特征。北宋初应天、乾道、仪天三历则采各家之法:金星14段法取用大衍历,火星12段法取自五纪历,木星和土星10段法取自崇玄历,而水星10段法取自钦天历。崇天历火星18段法(除明天历外)、土星12段法和金星20段法为后世各历法沿用不弃,其木星14段法亦为观天、纪元、统天、开禧、成天诸历及重修大明历、庚午历和授时历所采用,可见崇天历是对后世历法产生最大影响者。而明天历又创火星14段法和木星12段法,后者对统元、乾道、淳熙、会元四历产生了直接的影响。自明天历以后各历法并无新分段法出现,它们分别采用前已出现的有关分段法。

---

① 《新唐书·历志六下》。

② 《新五代史·司天考一》。

我们再来讨论大衍历及其后各历法五星动态表格纵向栏的设置状况：

大衍历五星动态表表格纵向栏均设有以下五栏："变行日中率"——横向各段所经历的日数；"变行度中率"——横向各段内五星视运动的实际行度；"差行损益率"——横向各段内五星每日实行度的递增或递减值；"变行度常率"——横向各段内五星相对于五星近日点的平均行度；"变行乘数、变行除数"——计算横向各段内由五星平合时日求定合时日改正数时，该改正数需以"乘数乘之，除数除之"，才得到真正的改正数。

五纪历纵向栏仅保留大衍历的前三栏，名称与含义亦与大衍历相同。

崇玄历纵向栏有"常积日"、"常积度"和"加减"三栏，前两栏的含义与大衍历前两栏相同，而"加减"栏含义不明，待考。

钦天历纵向栏有"变日"、"变度"和"变历"三栏，前两栏的含义亦与大衍历前两栏相同，而"变历"与大衍历"变行度常率"的含义有同有异，即同为横向各段内五星相对于五星近日点的行度，但却不是平均行度。

应天、乾元、仪天三历纵向栏有"平日"(或"变日"、"常日")、"平度"(或"变度"、"常度")和"阴阳历分"(或"前后限分"、"上下限")，其含义分别与钦天历三栏相同。

崇天历纵向栏有"变日"、"变度"、"限度"和"初行率"四栏，前三栏的含义分别与钦天历三栏相同，而"初行率"指横向各段初日五星的运动速度。自此以后诸历法纵向栏的设置均同此。只是"变日"又称"常日"、"段日"等，"变度"又称"常度"、"平度"等，"限度"又称"历度"，如此而已。

应该说纵横向栏设置的总体方法由大衍历开其端，一行扬弃了自隋刘焯、张胄玄以来试图对五星动态表本身进行改正，使动

态表变动不定的总体构想，而保持了五星动态表的相对稳定性，将五星运动不均匀性的改正表达为对五星入各不同时段的时日的改正，不对五星动态表本身做调整变动。显然，后世绝大多数历家肯定了一行的思路与方法，这是因为一行的思路与方法要比刘焯、张胄玄等人的思路与方法来得简明与有效。一行的思路和方法经由后继者，特别是宋行古的总结与提高，遂成定型，对后世产生了决定性的影响。

一行等人的思路与方法是：其一，将五星的动态分成若干段（这本质上与三统历、皇极历并无不同，只是数量上有所增加）。其二，对于每一段内五星运行速度取等差级数递增或递减的描述法（这与皇极历是相同的）。大衍历所设各段“差行损益率”，崇天历所设各段“初行率”，即指此而言。本栏“初行率”与次栏“初行率”之差，除以本栏“变日”数，即得本栏五星运动速度递增或递减之值。其三，在计算五星位于动态表的那一段时，需加五星运动不均匀性的改正，大衍历表中“变行度常率”、崇天历表中“限度”等即为此改正值的计算而设，这一改正值的计算另有表格供使用（见本章第九节）。

徐昂宣明历的五星动态表亦属一行思路与方法的范畴，但其表述稍异，故在此另作专门的介绍。其五星动态表横向栏为阳初、阳二……阳十二、阴初、阴二……阴十二，计 24 栏（其中水星亦应有 24 栏，但现传本却全部脱漏）。而纵向栏五星各异：

木星和土星均为：“前顺”、“前留”、“退行”、“后留”和“后顺”五栏（即五段分法）。

火星为：“前疾”、“前迟”、“前留”、“退行”、“后留”、“后迟”和“后疾”七栏（即七段分法）。

金星为：“夕疾”、“夕平”、“夕迟”、“夕留”、“夕退”、“退见晨行”、“晨迟”、“晨平”和“晨疾”九栏（即九段分法）。

水星为："夕疾"、"夕迟"、"夕留"、"晨留"、"晨迟"和"晨疾"六栏（即六段分法）。

上述各纵向栏中均分别载出所经日数和每日运行速度递增或递减的数值。

由此看来，徐昂宣明历五星动态表横、纵向栏交叉处所给的数值是与相应时日五星运动不均匀性改正有关的数值，其作用应与大衍历所给"变行度常率"相当，但它较大衍历所给者更为直观与详细。

第三节 二十八宿赤道和黄道宿度表

一、二十八宿赤道宿度表

中国古代对于二十八宿赤道宿度的测量至迟可以追溯到公元前6世纪初[①]。其明确地引入历法的记录首见于西汉三统历（太初历）中[②]，它是以文字描述的形式给出的，其数值列入表1—7。

如表所示的二十八宿赤道度前后相继，组成一周天的二十八宿赤道宿度坐标系统。欲求日、月、五星的赤道宿度，可依历法规定的特定算法和特定的赤道宿度起算点（如斗21度、虚7度等），依次推过若干宿次及其距度值，而得日、月、五星值某宿次某度。

上述二十八宿赤道距度值为战国时期石申夫所测，该值长期为历家所采用，直至唐代一行才重新测用新值。在编䜣东汉四分历（85）亦载有二十八宿赤道距度表，其中斗、牛、女、虚、心、尾、箕北方七宿的总宿度为"九十八度四分一"[③]，它较三统历所载"北九

---

① 潘鼐：《中国恒星观测史》，学林出版社，1989年，第38页。
② 《汉书·律历志下》。
③ 《汉书·律历志下》。

十八度”多出 1/4 度，这 1/4 度应属于斗宿，即斗宿赤道距度应为 $26\frac{1}{4}$度。这应是石申当年测值的真实写照。此后在杨伟景初历(237)中亦载此表，其中斗宿赤道宿度为“二十六度”，“分四百五十五”[①]，即 $26\frac{455}{1843}$度，其余各宿赤道距度与三统历全同。这是杨伟依他所认定的周天总度(即一回归年长度数)，对斗宿赤道宿度做了些微调整。同理，在张龙祥正光历(518)所载这一表格中，斗宿赤道宿度为“二十六度”，“一千四百七十七分”[②]，即 $26\frac{1477}{6060}$；在李业兴兴和历(540)所载该表格中，斗宿赤道距度为“二十六度”，“分四千一百一十七”[③]，即 $26\frac{4117}{16860}$度。而刘焯皇极历(604)和张胄玄大业历(607)所载二十八宿赤道距度表与三统历所载全同[④]。李淳风麟德历(665)所载此表亦同，仅在斗宿“二十六度”下添“及分”两字[⑤]。其实他们都同样取用了杨伟当年的调整法，只是未明确注明而已。其他如刘洪乾象历(206)、何承天元嘉历(443)、祖冲之大明历(463)，虽未载有二十八宿赤道距度表，但他们沿用三统历(太初历)以来的成法是没有疑问的。

唐玄宗开元十二年(724)，僧一行对二十八宿赤道距度重加测定，得出新值，用于大衍历之中[⑥]，其数值亦引载于表 1—7 中。

① 《晋书·律历志下》。
② 《魏书·律历志上》。
③ 《魏书·律历志下》。
④ 《隋书·律历志下》,《隋书·律历志中》。
⑤ 《旧唐书·历志二》。
⑥ 《新唐书·历志四上》。

表 1—7　三统等历二十八宿赤道宿度表

宿名 / 历名	角	亢	氐	房	心	尾	箕	斗	牛	女	虚	危	室	壁
三统	12	9	15	5	5	18	11	26 (26.25)	8	12	10	17	16	9
大衍	同上	同上	同上	同上	同上	同上	同上	26	同上	同上	同上	同上	同上	同上
纪元	同上	9.25	16.00	5.75	6.25	19.25	10.50	25.00	7.25	11.25	9.2572	15.50	17.00	8.75
授时	12.10	9.20	16.30	5.60	6.50	19.10	10.40	25.20	7.20	11.35	8.9575	15.40	17.10	8.60

宿名 / 历名	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	井	鬼	柳	星	张	翼	轸
三统	16	12	14	11	16	2	9	33	4	15	7	18	18	17
大衍	同上	同上	同上	同上	17	1	10	同上	3	同上	同上	同上	同上	同上
纪元	16.50	同上	15.00	11.25	17.25	0.50	10.50	33.25	2.50	13.75	6.75	17.25	18.75	同上
授时	16.60	11.80	15.60	11.30	17.40	0.05	11.10	33.30	2.20	13.30	6.30	同上	同上	17.30

一行此表也取文字描述之形式，他对描述的前后次序做了小的调整，即以斗宿为首，并把周天 365 度以外的小数置于虚宿之下。当然，这次测量最大的发现是“其毕、觜觿、参、舆鬼四宿度数，与古不同”[①]。一行的此新测值取代沿用了 11 个世纪的古测值，此举为后世历家欣然接受，其影响所及直至北宋姚舜辅之前的诸历家。王朴钦天历、王处讷应天历、吴昭素乾元历、史序仪天历、宋行古崇天历、周琮明天历、皇居卿观天历均载有与一行大衍历相同的二十八宿赤道距度表，只是各历对于虚宿度下分值均依本历法周天度分的大小做了小的调整。

直到北宋末姚舜辅在纪元历中才又给出新值[②]，其结果也引列于表 1—7 中。

该新测值与石申夫、一行所测比较，仅娄、轸、角三宿相同，其余都不一样。而且各宿距度值以少、半、太等描述之，即表面精度已在 1/4 度，较石申夫、一行仅以整度数描述要精确得多。此表亦取文字描述的方式，也以斗宿为二十八宿之首，它亦为南宋诸历所采用。在赵知微重修大明历（1180）和耶律楚材庚午历（1216）中，也赫然载有与之相同的文字，当然对于虚宿度下分值也依本历法周天度分的大小做了小的调整。

到郭守敬等人编制授时历（1281）又采用新测值[③]，其值亦引列于表 1—7 中。

此表仍取文字描述方式，但又改以角宿为二十八宿之首，其数值与石申夫、一行测值全然不同，而同姚舜辅测值相同者仅张、翼两宿。所列各值 100 分为 1 度，即表面精度已在 10 分（0.1 度）以内。

---

① 《新唐书・历志四上》。

② 《宋史・律历志十二》。

③ 《元史・历志三》。

据研究，石申夫、一行、姚舜辅和郭守敬对二十八宿赤道距度测值的平均误差分别为0°.47、0°.56、0°.16和0°.07[①]。虽然一行当年测值的平均误差还略大于石申夫当年的测值，但若继续沿用石申夫的测值于开元年间，其平均误差则达0°.69，所以改用一行的新测值乃是一种进步的表现和明智的选择。至于姚舜辅测值的精度较前大幅度地提高，其意义重大自不待言，而郭守敬等人更是锦上添花，把二十八宿赤道距度的测量精度提到历史上的最高水平，这当是郭守敬创制崭新的测量仪器和认真观测结出的硕果。

二、二十八宿黄道宿度表

二十八宿黄道宿度表的测量工作，大约开始于"石氏星经"成立的年代，而明确且系统的记载则首见于《续汉书·律历志中》内。汉和帝永元十五年(103)，太史用黄道铜仪测得二十八宿黄道距度值，该结果被东汉四分历所吸收，成为历法的一个组成部分。它是以文字描述的方式表述的，从角宿开始，各宿依次首尾衔接，组成一周天的二十八宿黄道宿度坐标系统。其使用方法则与前述二十八宿赤道宿度表相同，供计算日、月、五星黄道宿度之用。

在后世的历法中，载有二十八宿黄道宿度表者，还有刘焯的皇极历、李淳风的麟德历、一行的大衍历、王处讷的应天历、吴昭素的乾元历、史序的仪天历、宋行古的崇天历、周琮的明天历、皇居卿的观天历、姚舜辅的纪元历、赵知微的重修大明历、耶律楚材的庚午历、郭守敬等人的授时历。现将各历二十八宿黄道宿度表的具体数值一并列于表1－8中，由于乾元、仪天和崇天三历二十八宿黄道宿度表中数值讹误较多，尚无由校核，故暂付之阙如。

① 潘鼐:《中国恒星观测史》，学林出版社，1989年，第18、139、175、272页。

表1—8中所示各历法对二十八宿黄道宿度的描述，东汉四分历和授时历起于角宿，其余各历法均起于斗宿。此外表1—8中尚有九处需作说明：

①皇极历现传本斗宿仅记为24度，应补周天分的余分于下，即周分12016，其分母称度法为64466。

②《旧唐书·历志二》中亦有记载，但讹误较多，应据《新唐书·历志二》改正。

③大衍历现传本中在虚十后小字记“六虚之差十九太”，“六虚之差”的含义为虚分760，再加上“十九太”，即虚分779.75，其分母称通法为3040。

④应天历现传本记为“氐十二度少”，前后诸历法氐均为15度左右，且现传本载“东方七宿七十五度少”，亦证氐应为15度左右，故应改为“氐十五度少”。

⑤应天历现传本载“东方七宿七十五度少”，但并东方七宿度仅得75度，故应改现存本所载“箕十度”为“箕十度少”。

⑥应天历现传本记“壁十度”，又记“北方七宿九十七度二千五百六十三、秒十九”，并北方七宿度较之少1/4度，故需改为“壁十度少”。

⑦应天历现传本记作“翌”，应为“翼”。

⑧明天历现传本记作“心四”，又载“东方七宿七十四度太”，但并东方各宿度仅得74度，又查观天历与明天历二十八宿黄道度相同，其记为“心四太”，故应据改。

⑨庚午历与重修大明历的差异仅在于取虚为9.2567度。

由表1—8可见，皇极历二十八宿黄道宿度与东汉四分历不同者有斗、女、危、室、娄、昴、毕、觜、参、柳、尾、箕等十二宿，除斗宿外，两者相差为0.5度或1度不等。麟德历二十八宿黄道宿度与东汉四分历不同者有斗、娄、昴、觜、参五宿，而与皇极历不同者有斗、女、危、室、毕、柳、尾、箕八宿，除斗宿外，彼此之差亦为0.5度或1度不

表1—8 诸历二十八宿黄道宿度表

	东汉四分历	皇极历	麟德历	大衍历	应天历	明天历 观天历	纪元历	重修大明历 庚午历	授时历
角	13	13	3	13	13	13	12.75	12.75	12.87
亢	10	10	10	9.5	9.5	9.5	9.75	9.75	9.56
氐	16	16	16	15.75	15.25[4]	15.5	16.25	16.25	16.40
房	5	5	5	5	5	5	5.75	5.75	5.48
心	5	5	5	4.75	5	4.75[8]	6	6	6.27
尾	18	17	18	17	17.25	17	18.25	18.25	17.95
箕	10	10.5	10	10.25	10.25[5]	10	9.5	9.5	9.59
斗	24.25	$24\frac{12016}{64466}$[1]	$24\frac{328}{1340}$	23.5	23.5	23.5	23	23	23.47
牛	7	7	7	7.5	7.5	7.5	7	7	6.90
女	11	11.5	11	11.25	11.75	11.5	11	11	11.12
虚	10	10	10	$10\frac{779.75}{3040}$[3]	$10\frac{2563\frac{19}{24}}{10002}$	10.2564	9.2572	9.2568[9]	9.0075
危	16	17	16	17.75	17.25	17.75	16	16	15.95
室	18	17	18	17.25	16.75	17.25	18	18.25	18.32
壁	10	10	10	9.75	10.25[6]	9.75	9.5	9.5	9.34

续表

奎	17	17	17	17.5	17.75	17.75	18	17.75	17.87
娄	12	13	13	12.5	12.75	12.75	12.75	12.75	12.36
胃	15	15	15	14.75	14.25	14.5	15.5	15.5	15.81
昴	12	11	11	11	11	10.75	11	11	11.08
毕	16	15.5	16	16.25	16.5	16	16.5	16.5	16.50
觜	3	2	2	1	1	1	0.5	0.5	0.05
参	8	9	9	9.25	9.25	9.25	9.75	9.75	10.28
井	30	30	30	30	30	30	30.5	30.5	31.03
鬼	4	4	4	2.75	2.75	2.75	2.5	2.5	2.11
柳	14	14.5	14	14.25	14.5	14.25	13.25	13.25	13.00
星	7	7	7	6.75	7	7	6.75	6.75	6.31
张	17	17	17	18.75	18.25	18.75	17.75	17.75	17.79
翼	19	19	19	19.25	19.25[⑦]	19.5	20	20	20.09
轸	18	18	18	18.75	18.75	18.75	18.5	18.5	18.75
文献出处	续汉书·律历志中	隋书·律历志下	新唐书·历志二[②]	新唐书·历志四上	宋史·律历志一	宋史·律历志七和十	宋史·律历志十二	金史·历志上;元史·历志五	元史·历志三

等。刘焯和李淳风显然是对二十八宿黄道宿度重新做了测量工作，这与他们所取二十八宿赤道宿度均沿用石申夫的测值有所不同。大衍历二十八宿黄道宿度值与前三种历法完全相同者仅有角、房、井三宿。这同大衍历所测二十八宿赤道宿度值仅有毕、觜、参、鬼四宿与石申夫测值有别，这似乎说明二十八宿黄道宿度随时间的变化要较二十八宿赤道宿度敏感得多，这大约也就是应天、乾元、仪天、崇天、明天和观天诸历均各给出二十八宿黄道宿度值的原因，而如前所述，这些历法在取用二十八宿赤道宿度值时均沿用大衍历之值。从大衍历开始，对二十八宿黄道宿度的描述业已引进少、半、太的概念，即其表面精度已达 1/4 度，这大体说明历家似更注重黄道宿度值的描述。纪元历二十八宿黄道宿度值基本上与前代历法不同，南宋诸历均承用其值，重修大明历和庚午历亦与之大同小异(仅虚、室、奎三宿略做调整)，可见其影响之深远。而授时历又出新测值，其表面精度更达 0.01 度。

还要特别指出的是，二十八宿黄道宿度与现代通用的黄经或黄经差(沿黄经圈在黄道上量度而得)不同。它是以天球赤极为基点，沿赤经圈在黄道上进行度量的宿度值，可称之为“极黄经”，这是中国古代黄道宿度的特点。

第四节　二十四节气太阳所在赤道宿度和昏旦中星表

一、二十四节气太阳所在赤道宿度表

至迟在战国时期已经出现一年十二个月太阳所在赤道宿度的完整记述，而以二十四节气为单位的太阳所在宿度表被引进历法，则首见于西汉三统历(太初历)之中，同时它们还与十二次相联系，其文曰：“星纪，初斗十二度，大雪。中，牵牛初，冬至，终于

婺女七度;……"[1]云云。这种文字描述方式给出的二十四节气太阳所在赤道宿度等的表格可示如表1－9中。

二十四节气太阳所在赤道宿度表实际上是由二十八宿赤道宿度表衍生出来的。对于三统历(太初历)而言,其冬至太阳在牵牛初度,由此每经15(或16)度,即可推得冬至后各节气太阳所在赤道宿度之值。欲求任一时日太阳所在赤道宿度值,先求知该时日所入节气和所余日数,再由二十四节气太阳所在赤道宿度表所列的该节气和下一节气的太阳所在赤道宿度,用一次内插法便可求得。

东汉明帝永元十四年(102)发生过一次重大的漏刻制度的改革,曾有"取二十四气日所在,并黄道去极、晷景、漏刻、昏明中星刻于下"[2]的举措,即给出过包括二十四节气太阳所在赤道宿度在内的五种表格,可惜这些表格的形式和具体内容没有流传下来。而在东汉四分历中,我们确实看到了这五种表格,它们是以典型的表格形式给出的,横向列冬至、小寒……二十四节气计24栏,纵向列"日所在"、"黄道去极"、"晷景"、"昼漏刻"、"夜漏刻"、"昏中星"和"旦中星"[3]等七栏,纵横两栏相交叉处给出相应的数据。但它们却是刘洪和蔡邕在东汉灵帝熹平三年(174)观测的结果。他们关于二十四节气太阳所在赤道宿度的测量结果亦列于表1－9中。在该表中,以冬至为节气之首,二十四节气中先雨水后惊蛰,次序与三统历(太初历)不同(下述各历法凡未特别注明者,其次序均与东汉四分历相同)。这时刘洪、蔡邕认定冬至在赤道斗宿$21\frac{1}{4}$度,自此每经一节气累加$365\frac{1}{4}/24=15\frac{7}{32}$度,即为各节气太阳所在赤道宿度值。

---

① 《汉书·律历志下》。

② 《续汉书·律历志中》。

③ 《续汉书·律历志下》。

表1—9 诸历二十四节气太阳所在赤道宿度表

12次	节气	三统历（太初历）	东汉四分历	景初历	元嘉历	12次	节气	三统历（太初历）	东汉四分历	景初历	元嘉历
星纪	大雪	斗 12	斗 $6\frac{1}{32}$	斗 6	箕 10	鹑首	芒种	井 16	井 $10\frac{13}{32}$	井 $10\frac{5}{12}$	井 $3\frac{5}{12}$
	冬至	牛 0	斗 $21\frac{8}{32}$	斗 $21\frac{3}{12}$	斗 $14\frac{3}{12}$		夏至	井 31	井 $25\frac{20}{32}$	井 $25\frac{7}{12}$	井 $18\frac{8}{12}$
玄枵	小寒	女 8	女 $2\frac{7}{32}$	女 $2\frac{3}{12}$	牛 $3\frac{3}{12}$	鹑火	小暑	柳 9	柳 $3\frac{27}{32}$	柳 $3\frac{10}{12}$	鬼 $\frac{11}{12}$
	大寒	危 0	虚 $5\frac{14}{32}$	虚 $5\frac{5}{12}$	女 $10\frac{5}{12}$		大暑	张 3	星 $4\frac{2}{32}$	星 $4\frac{1}{12}$	柳 $12\frac{2}{12}$
娵訾	立春	危 16	危 $10\frac{21}{32}$	危 $10\frac{8}{12}$	危 $1\frac{7}{12}$	鹑尾	立秋	张 18	张 $12\frac{9}{32}$	张 $12\frac{3}{12}$	张 $5\frac{4}{12}$
	惊蛰	室 14	室 $8\frac{28}{32}$	室 $8\frac{10}{12}$	室 $1\frac{10}{12}$		处暑	翼 15	翼 $9\frac{16}{32}$	翼 $9\frac{6}{12}$	翼 $2\frac{6}{12}$
降娄	雨水	奎 5	壁 $8\frac{3}{32}$	壁 $8\frac{1}{12}$	壁 $1\frac{1}{12}$	寿星	白露	轸 12	轸 $6\frac{23}{32}$	轸 $6\frac{9}{12}$	翼 $17\frac{9}{12}$
	春分	娄 4	奎 $14\frac{10}{32}$	奎 $14\frac{4}{12}$	奎 $7\frac{4}{12}$		秋分	角 10	角 $4\frac{30}{32}$	角 $4\frac{11}{12}$	轸 15
大梁	谷雨	胃 7	胃 $1\frac{17}{32}$	胃 $1\frac{6}{12}$	娄 $6\frac{6}{12}$	大火	寒露	氐 5	亢 $8\frac{5}{32}$	亢 $8\frac{2}{12}$	亢 $1\frac{3}{12}$
	清明	昴 8	昴 $2\frac{24}{32}$	昴 $2\frac{9}{12}$	胃 $9\frac{8}{12}$		霜降	房 5	氐 $14\frac{12}{32}$	氐 $14\frac{4}{12}$	氐 $7\frac{6}{12}$
实沈	立夏	毕 12	毕 $6\frac{31}{32}$	毕 7	昴 $10\frac{11}{12}$	析木	立冬	尾 10	尾 $4\frac{19}{32}$	尾 $4\frac{7}{12}$	心 $2\frac{8}{12}$
	小满	井 0	参 $4\frac{6}{32}$	参 $4\frac{2}{12}$	毕 $15\frac{2}{12}$		小雪	·箕 7	箕 $1\frac{26}{32}$	箕 $1\frac{10}{12}$	尾 $12\frac{10}{12}$

杨伟景初历(237)中亦给出了表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表,其数值用强、少弱、少、少强、半弱、半、半强、太、太强、弱(分别为1/12、2/12、…、11/12)等表示。杨伟亦以为冬至在赤道斗宿21 $\frac{1}{4}$度,自此每经一节气累加15 $\frac{2}{12}$或15 $\frac{3}{12}$度,而得各节气太阳所在赤道宿度。其实质与刘洪、蔡邕法并无不同,杨伟只是偏爱强、少弱等的表述法,从严格意义上讲不如刘洪、蔡邕法精密。

何承天元嘉历(443)亦载有表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表,亦引见表1—9中,该历法以雨水作为二十四节气的第一个节气,其数值也以强、少弱……命之。此表的编制方法应与杨伟景初历相同,从雨水在赤道"室一太强$\left(1\frac{10}{12}\right)$"度起算,每经一节气累加15 $\frac{3}{12}$或15 $\frac{2}{12}$度,并虑及二十八宿赤道宿度表,即得。依此,现传本元嘉历二十四节气太阳所在赤道宿度表应做如下11处改正:"立夏昴十一弱"应作"立夏昴十弱";"夏至井十八"应作"夏至井十八太弱";"小暑鬼一弱"应作"小暑鬼初弱";"大暑柳十二弱"应作"大暑柳十二少弱";"立秋张五半强"应作"立秋张五少强";"白露翼十七太弱"应为"白露翼十七太";"立冬心二半弱"应作"立冬心二太弱";"冬至斗十四强"应作"冬至斗十四少弱";"小寒牛三半强"应作"小寒牛三少弱";"大寒女十半强"应作"大寒女十半弱";"立春危四"应作"立春危四半强"。

李淳风麟德历(665)也载有表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表(其二十四节气次序先惊蛰后雨水),它们给出的是二十四节定气时的相应数值,这是该表与前代不同之处。现存本所载明显有错误的地方,如,翼宿和角宿的赤道距度分别只有18度和12度,但《旧唐书·历志二》表中却载白露"翼十九度六百四十分一",寒露"角十三度一千二百一十五分五"。又如,小暑"井三十

度七百九十八分五”，大暑“柳十一度一千九十一分四”，立秋“张六度三十四分三”，依此计算小暑至大暑太阳行度为18度余，而大暑至立秋太阳行度仅为9度余。该表的校改是比较复杂的问题，有待进一步的研究。

自李淳风以后各历家均不列二十四节气太阳赤道宿度表，这大约是因为在太阳运动不均匀性发现以后，再不能应用此表依一次内插法简捷地计算太阳所在赤道宿度，给出此表对太阳所在赤道宿度的计算并无有效作用，故以特定的算法取代之。

二、二十四节气昏旦中星表

中国古代对于昏中星的观测有悠久的历史，《尚书·尧典》关于四仲中星的记载，便是二至、二分昏中星观测早期状况的反映。至迟到战国时期，已出现十二个月昏旦中星的系统记录，《吕氏春秋》十二纪的首句就指此而言。二十四节气昏旦中星表载于东汉四分历中，它是以典型的表格方式给出的。其横向列二十四节气栏，纵向分列“昏中星”和“旦中星”两栏。二十四节气昏旦中星的赤道宿度是与二十四节气太阳所在赤道宿度以及二十四节气昼夜漏刻长度有关的数值，可用以下两式表述：

$$\text{旦中星度}=\text{二十四节气太阳所在赤道宿度}+\text{周天度}-\frac{\text{昼漏刻}\times\text{周天度}-\text{夜漏刻}}{200} \qquad (1-1)$$

$$\text{昏中星度}=\text{二十四节气太阳所在赤道宿度}+\frac{\text{昼漏刻}\times\text{周天度}-\text{夜漏刻}}{200}+1 \qquad (1-2)$$

这两个算式既虑及昏、旦时太阳与中天子午圈的距度，又虑及太阳从夜半到昏或旦期间赤道宿度的变化，其中“昼漏刻”和“夜漏刻”分别指从旦到昏、从昏到旦的时距，周天度为365.25。依此数量关系和二十八宿赤道宿度表，便可对东汉四分历二十四节气昏旦中

星赤道宿度表作核算，现将正确的结果列于表1—10中。

杨伟景初历亦载有二十四节气昏旦中星赤道宿度表，其值与东汉四分历相同。《晋书·律历志下》和《宋书·律历志上》均载有该表格，其中有若干讹误亦应依表1—10中所示加以订正。有趣的是，我们对东汉四分历表所做的八处校正（见表1—10中斜体表示者，下同）中有五处正好与《晋书·律历志下》和《宋书·律历志上》所载值相吻合（见表1—10中加 * 号者），这正可证明我们所作的订正是可靠的。

何承天元嘉历也有二十四节气昏旦中星赤道宿度表，其计算方法亦应如式(1—1)和式(1—2)。如该表中小雪"日所在度"为"尾十二太强"，昼夜漏刻分别为46.7和53.3刻，依上述算式计，正分别可得昏中星和旦中星为"危十三半强"和"翼八太强"[①]。又如，夏至、大暑和立秋三节气，依上述算式计算所得昏旦中星度亦全合（该三节气的"日所在度"需如表1—10所示校改）。可是现存本所载昏旦中星度讹误太多，如，白露旦中星度记为"毕十六半弱"，寒露昏中星记为"牛八半强"，而毕宿和牛宿的赤道距度分别仅为16度和8度，其讹误极其明显，必为对天文历法无知者所妄改。虽然我们可以依上述算式对之重加计算，但其讹误的原因尚不完全清楚，姑暂存待考。

祖冲之大明历所载二十四节气昏旦中星度采用了新的形式，它不再给出具体的二十八宿宿次及度数，而是给出昏旦中星同相应节气太阳所在宿度的距度值。考其距度值的计算，正依上述算式进行，而且对计算尾数采用了四舍五入的处理方式。现传本《宋书·律历志下》所列各值除清明和白露"昏中星度""百六二十"需改作"百六二十一"之外，均无误（请注意大明历的周天度取

---

① 《宋书·律历志下》。

为 365.2646 度）。其“昏中星度”的数值引列于表 1—10 中，而“旦中星度”均等于 $366\frac{6}{23}$减去“昏中星度”。

表 1—10　诸历二十四节气昏旦中星赤道宿度(或距度)表

历名／节气	东汉四分历与景初历		大明历昏中星度	皇极历昏去中星	麟德历昏去中度	大衍历距中星度	乾元历距中度
	昏中星	旦中星					
冬至	奎 6 弱	亢 2 少强	$82\frac{21}{23}$	$82\frac{34.5}{52}$	*82.1*	82.26	82.22
小寒 大雪	娄 6 半强 壁半强	*氐 7 强＊* *轸 15 少*	84	$83\frac{15}{52}$	83.0	82.91	*83.10*
大寒 小雪	胃 11 半强 室 3 半强	心半 翼 15 大强	$86\frac{1}{23}$	$85\frac{6}{52}$	84.8	84.77	84.84
立春 立冬	毕 5 少弱 危 8 强	尾 7 半弱 强 15 大强	$89\frac{3}{23}$	$87\frac{50}{52}$	87.7	87.70	87.94
雨水 霜降	参 6 半弱 虚 6 大	*箕半强* *星 3 大＊*	93	$91\frac{36}{52}$	91.6	91.39	*91.67*
惊蛰 寒露	井 17 半弱 女 7 大	斗少 鬼 3 少强	$97\frac{9}{23}$	$96\frac{3}{52}$	*95.8*	95.88	*96.14*
春分 秋分	鬼 4 牛 5 少	斗 11 弱 井 16 少强	$102\frac{3}{23}$	$100\frac{37.5}{52}$	100.4	100.445	*100.62*
清明 白露	*星 4 大强* 斗 21 强	半 21 半 *参 5 少强＊*	$106\frac{21}{23}$	$105\frac{21}{52}$	*105.0*	105.01	*105.09*
谷雨 处暑	张 17 斗 10 少	牛 6 半 毕 3 大	$111\frac{3}{23}$	$109\frac{39}{52}$	*109.3*	109.50	109.56
立夏 立秋	翼 17 大 箕 9 大强	*女 10 少弱＊* 胃 9 大弱	$114\frac{18}{23}$	$113\frac{25.5}{52}$	113.1	113.19	*113.29*
小满 大暑	角大弱 尾 15 半弱	危大弱 娄 3 大	$117\frac{12}{23}$	$116\frac{19}{52}$	116.0	116.12	116.15
芒种 小暑	亢 5 大 尾 1 大强	危 14 强 奎大强	$119\frac{4}{23}$	$118\frac{18}{52}$	*117.8*	117.98	118.14
夏至	氐 12 少弱	*室 12 强＊*	$119\frac{12}{23}$	$118\frac{41}{52}$	118.7	118.63	118.58
文献出处	续汉书·律历志下	晋书·律历志下	宋书·律历志下	隋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	宋史·律历志二

自东汉四分历到大明历，欲求任一日昏旦中星度，可用上列表格，依一次差内插法计算之。

刘焯皇极历亦取祖冲之的方法，给出了二十四节气“昏去中星”表。经校算，现传本《隋书·律历志下》所列“昏去中星”各值，若依上述算式计算均不合，必须对上述算式中的昼、夜漏刻数作如下改正：昼漏刻需减去 0.27 刻，夜漏刻需加上 0.27 刻。又，皇极历表中所给为“夜半漏”（夜漏刻之半），所以上述算式中的改正值需改作：

$$昏去中星=\frac{(50-夜半漏-0.135)\times周天度-(夜半漏+0.135)}{100}+1$$

$$=\frac{50\times周天度-(夜半漏+0.135)\times(周天度+1)}{100}+1$$

(1—3)

依此算式计算（皇极历所取周天度为 365.25761），现传本皇极历二十四节气“昏去中星”表中，冬至 $82\frac{47}{52}$度需改作 $82\frac{34.5}{52}$度；小寒和大雪 $83\frac{16}{52}$度应改作 $83\frac{15}{52}$度；立春和立冬 $87\frac{49}{52}$度应改作 $87\frac{50}{52}$度；立夏和立秋 $113\frac{25}{52}$度应改作 $113\frac{25.5}{52}$度；夏至 $118\frac{40}{52}$度应改作 $118\frac{41}{52}$度，其余各节气值均合。其中除了冬至数值需做较大改动外，其他改动的数值为 0.5/52 到 1/52 不等。应该说式(1—3)是可信的。经校算后的皇极历的二十四节气“昏去中星”值亦载于表 1—10 中。

我们知道，中国古代一般以日出前 2.5 刻为旦，日落后 2.5 刻为昏。东汉四分历、景初历和大明历等均做此理解。而刘焯对上述算式所做的修正表明，在计算昏旦中星时，他是以日出前 2.365刻为旦，日落后 2.365 刻为昏的，这大约便是刘焯在算式中

增夜半漏，减昼半漏刻数各 0.135 刻的理由。

李淳风麟德历二十四节气"昏去中度"表的算法与刘焯算法无异。所需注意的是，麟德历中给出的二十四节气"晨前刻"是指日入到日出之间的时距之半，则"夜半漏"＝"晨前刻"－2.5 刻。设李淳风所取的改正为 0.22，而不是刘焯所取的 0.135 刻，则可得以下算式：

$$\text{昏去中度}=\frac{50\times\text{周天度}-(\text{晨前刻}-2.28)\times(\text{周天度}+1)}{100}+1 \qquad (1-4)$$

麟德历的周天度为 365.2448，依之可对麟德历二十四节气"昏去中度"表作核算，结果与表载值不同者有 6 处：冬至 82.2 度，而计算为 82.1 度；惊蛰和寒露 95.9 度，而计算为 95.8 度；清明和白露 104.9 度，而计算为 105.0 度；谷雨 109.2 度，而计算为 109.3 度。其中与谷雨相对称的处暑表载值为 109.3 度，可见谷雨载为 109.2 度应有误。这就是说式(1－4)的设定是可靠的。如此看来，李淳风在计算昏旦中星时是以日出前 2.28 刻为旦，日落后 2.28 刻为昏的。又，小暑载为 119.8 度，显系 117.8 度，应改正。现亦将核算后的结果列于表 1－10 中。

一行大衍历给出的是二十四节气"距中星度"，与以前各历法的含义有所不同，察表载各值，是由下式算得的：

$$\text{距中星度}=\frac{50-\text{“漏刻”}}{100}\times\text{周天度} \qquad (1-5)$$

即其"距中星度"仅虑及在昏旦时太阳同中天子午圈之间的度距。在计算昏旦中星度时，是以太阳昏旦时所在的赤道宿度入算，其结果与前代各历法的相应算法相同，只是在计算程序上有所调整。其中"漏刻"是指各节气从昏到旦的时距之半，周天度取 365.2565。依此校算《新唐书·历志四上》表载各值全合(亦引载于表 1－10 中)。

欲求任一日距中星度，大衍历有术曰：

又置消息定衰，以万二千三百八十六乘之，如万六千二百七十七而一，为度差，差满百为度。各递以息加、消减其气初距中度，得每日距中度定数。①

依术文意则有：

$$某日距中度定数=其气初距中度\pm\frac{12386}{16277\times100}\times消息定衰 \qquad (1—6)$$

式中，“消息定衰”值可由表列“消息衰”和“陟降率”计算而得。

徐昂宣明历亦给出二十四节气“距中星度”，其算法与一行大衍历相似，但需令式(1—5)中的“漏刻”（宣明历称之为“夜半定漏”）加一改正值(Δ)，才能使计算结果与《新唐书·历志六上》的表载值相合。经验算其Δ值从0.023到0.172，$\left[\Delta=50-“夜半定漏”-\frac{“距中星度”\times100}{周天度(365.2565)}\right]$呈弥散分布，并无规律可循。这似不能用表载值有讹误来解释，我们也无由判定哪一数字有讹误，只能认为徐昂似采用了一种我们尚不能理解的特殊的Δ取值法。

吴昭素乾元历也载有二十四节气“距中星度”表。乾元历还给出“距中星度”与“晨分”之间的关系，其术曰：

百约晨分，进一位，以三千六百五十三乘，如元率(2940)收为度……不尽，退除为距子度，用减半周天度(182.6282)，余为距中星度分。②

① 《新唐书·历志四上》。

② 《宋史·律历志二》。

依之则有：

$$距中星度=182.6282-\frac{晨分\times10\times3653}{100\times2940} \quad (1-7)$$

据式（1－7）可对乾元历“距中星度”表作校算，并引列表1－10中。

此后各历法均不再给出二十四节气“距中度”的表格，而是计算在得“夜半漏刻”的基础上，以术文的形式给出计算每日昏旦中星度的方法。

第五节　二十四节气晷长、昼夜漏刻和日出入时刻表

一、二十四节气晷长表

最早以文字描述方式给出二十四节气午中晷影长度表者，当推西汉《周髀算经》，其后两汉之际的纬书《易纬》亦有记载。该两书所给冬至晷长分别为13.5尺和13尺。若令冬至后每经一节气晷长递减0.99$\frac{1}{6}$（或0.96）尺，可得到夏至各节气的晷长值，此后令每经一节气晷长递增0.99$\frac{1}{6}$（或0.96）尺，即得到冬至各节气的晷长值，所以《周髀算经》和《易纬》所列二十四节气晷长值并不是实测的结果。

现存最早的二十四节气晷长实测值表亦首见于东汉四分历中。它是以典型的表格式描述的（以后各历法均同此），横向栏列二十四节气名，纵向栏称“晷景”。其数值引列于表1－11中。考察其二至前后各节气的晷影长度可知，冬至前各节气晷长恒大于冬至后各节气晷长，而夏至前各节气晷长均小于夏至后各节气晷长，这一现象刘宋祖冲之就已注意到了，并由之得到刘洪、蔡邕所

定冬至时刻后天“二日十二刻”[1]的正确推论。也就是说，刘洪、蔡邕是在冬至时刻的推算后天2日余的情况下，由实测而得东汉四分历所载二十四节气晷长表的。欲求任一时日晷长，可用该表依一次内插法求得。

杨伟景初历(237)所载二十四节气晷长表的数值与东汉四分历全同。

何承天元嘉历(443)则给出二十四节气晷长新值(结果亦列于表1—11中)。它以雨水为二十四节气之首，而二至前后各节气的晷长是两两相应的(其中“雨水”与“霜降”两相对称，晷长应相等，但现存本所载一为“八尺二寸二分”，一为“八尺二寸八分”，两者中必有一误，因难以判别是非，姑两存之)。何承天是在经过长期观测的基础上对二十四节气晷长表做出这种归纳的，较《周髀算经》和《易纬》晷长表而言，它更具实测的基础，较东汉四分历晷长表而言，它更富理论的色彩。在二十四节气晷长表的实测性和规整化两个方面，何承天都作出了重大的贡献。

祖冲之大明历(463)亦载有二十四节气晷长表，其结果也引列于表1—11中。祖冲之也曾做过长期而细致的晷影测量工作，但有趣的是，他似并未真正采用他经实测的结果。清代李锐指出，大明历二十四节气晷长表各值是依据东汉四分历二十四节气晷长表中所列二至前后晷长两两相加，折半而得的[2]。考察大明历二十四节气晷长表各值，知李锐之说可谓天衣无缝，我们难以想象祖冲之实测的结果正与之相合。至于祖冲之为什么要采用这种方法构建大明历的二十四节气晷长表，一时还难寻准确的答案。也许祖冲之来不及对二十四节气晷长做充分的测量，而权取此法；也许祖冲之对二十四节气晷长的实测结果与上述处理方法

① 《宋书·律历志下》。

② 《续汉书·律历志下》校勘记[一五四]。

所得比较接近，为神其事而取此法，实难言也。

表 1－11　诸历二十四节气晷长表

节气＼历名	东汉四分历、景初历	元嘉历	大明历	麟德历	大衍历	宣明历
冬至	13	13	13	12.75	12.7150	12.7312
小寒 大雪	12.3 12.56	12.48	12.43	12.28	12.2277	12.3911
大寒 小雪	11 11.4	11.34	11.2	11.15	11.2182	11.3830
立春 立冬	9.6 10	9.91	9.8	9.62	9.7351	9.9478
雨水 霜降	7.95 8.4	8.22	8.17	8.07	8.2106	8.3781
惊蛰 寒露	6.5 6.85	6.72	6.67	6.54	6.7384	6.8874
春分 秋分	5.25 5.5	5.39	5.37	5.33	5.4319	5.4470
清明 白露	4.15 4.35	4.25	4.25	4.24	4.3210	4.1959
谷雨 处暑	3.2 3.33	3.25	3.26	3.30	3.3047	3.2069
立夏 立秋	2.52 2.55	2.5	2.53	2.49	2.5331	2.4451
小满 大暑	1.98 2	1.97	1.99	1.98	1.9576	1.8989
芒种 小暑	1.68 1.7	1.69	1.69	1.64	1.6003	1.5714
夏至	1.5	1.5	1.5	1.49	1.4779	1.4780
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	宋书·律历志下	宋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上

李淳风麟德历(665)给出了新测二十四节气晷长表，该表横向列二十四节气名，纵向列“日中影”(相应节气晷长)和“陟降率”(相邻两节气晷长差，前多为陟，前少为降)两栏。《旧唐书·历志

二》现存本所载各值有些讹误，可依二至前后对应节气的晷长相等，大雪和冬至前后、芒种和夏至前后“陟降率”的绝对值相等，以及“日中影”和“陟降率”之间存在的数量关系这三者加以校核。其“日中影”需校改者有：“启蛰八尺七寸”应作“八尺七分”；“清明四尺三寸四分”和“白露四尺三寸四分”均应作“四尺二寸四分”；“立夏三尺四寸九分”应作“二尺四寸九分”；“处暑三尺三分”应作“三尺三寸”；“大雪一丈二寸八分”应作“一丈二尺二寸八分”。其“陟降率”需校改者有：“冬至陟四寸一分”应作“四寸七分”；“小雪陟三尺一寸三分”应作“一尺一寸三分”；“大寒陟一尺五寸二分”应作“一尺五寸三分”；“雨水降二尺二寸一分”应作“一尺二寸一分”。校改后的“日中影”亦引列于表1－11中[①]。欲求任一时日(t_0)晷长值$f(t)$，可应用该表所列“日中影”和“陟降率”依二次差内插法求算之。这是李淳风麟德历较前代同类算法的高明之处。据研究[②]，求$f(t)$的算法为：

$$f(t)=f(a)\pm\left[\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{15}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\times15^2}(\Delta_1-\Delta_2)\right] \qquad (1-8)$$

式中：$f(a)=$某节气“日中影”$\pm\frac{\text{恒气小余}-670}{1340}\times$初日影定差。

这是关于从二十四节气时的晷长归算到二十四节气日中时晷长的计算。

$$\text{初日影定差}=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{1}{15}|\Delta_1-\Delta_2|$$

---

① 纪志刚：《麟德历晷影计算方法研究》，《自然科学史研究》，1994年，第4期。已对此做了相同的校改。

② 纪志刚：《麟德历晷影计算方法研究》，《自然科学史研究》，1994年，第4期。已对此做了相同的校改。

$$\mp\frac{1}{2\times15^2}|\Delta_1-\Delta_2| \quad (1-9)$$

t 为所求时日(t_0)入于某节气的时日数。恒气小余为该节气平气时日数不足一日部分的分值。Δ_1 和 Δ_2 分别为该节气和次节气的“陟降率”,可由表查得。某节气“日中影”亦可由表查得。

一行大衍历又给出了二十四节气(定气)晷长新测表[①],其值亦列于表 1－11 中。该表应是一行等人在阳城(河南登封)经由实测而得的,此表还成为大衍历据以推求九服晷长的基础之一。该表所列各值是为某定气交气时的晷长,所以它是在实测的基础上经由某种数学处理而得的数值,其表面精度为 0.0001 尺,这自然不是实际的精度,大衍历中也应用了与李淳风相类似的从二十四节气时晷长值向二十四节气日中时晷长值的归算方法。据研究,大衍历二十四节气定气时晷长值的平均误差为 0.022 尺[②]。

徐昂宣明历(821),也给出二十四定气晷长表,表中亦给出“阳城日晷”新值,其结果亦引列于表 1－11 中。徐昂新测值的平均误差较一行测值为大,即反不如大衍历准确。同样需指出的是,徐昂测值表面精度均达到 0.0001 尺,这显然不是实测的结果,而是利用一行的晷影差分表推衍而得的[③]。

五代王朴亦曾进行二十四节气晷长的实测工作,在钦天历中有“岳台中晷”术曰:“置午中入历分,以其日损益率乘之,如统法而一,为分;分十为寸。用损益其下中晷数,为定数也”[④],可见钦天历原应有晷长表,而且该表是每日均给出一“损益率”和“晷数”的,而该二值是如何求得,在钦天历中未见有关术文,只好存而待

① 《新唐书 · 历志四上》。

② 陈美东:《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》,《自然科学史研究》,1985 年,第 3 期。

③ 曲安京:《大衍历晷影差分表的重构》,《自然科学史研究》,1997 年,第 3 期。

④ 《新五代史 · 司天考一》。

考。有趣的是，在北宋周琮等人编撰的《岳台晷景新书》中却引载有王朴钦天历二十四节气晷长测算的结果[①]。

北宋初王处讷应天历和吴昭素乾元历亦给出“二十四气午中晷景”表[②]，察其数值均系由一行大衍历二十四节气“阳城日晷”取舍而得。在第二章第七节中，我们将要论及，自唐末边冈崇玄历开始，关于晷长的计算已采用比较捷便的公式算法，王朴大约亦取公式算法，但北宋初年的应天历和乾元历却返复到传统的表格计算法上去，而且仅仅是简单地重复一行之法，此举实不合改革的潮流。随后不久，史序仪天历继承边冈所开拓的新方向而取公式算法，其后各历法亦均进一步发扬光大之。

二、二十四节气昼夜漏刻表

在历法中首载该表格者亦为东汉四分历，乃刘洪、蔡邕所实测。其前，在汉和帝永元年间已有这类表格，可惜早已失传。东汉四分历二十四节气昼夜漏刻表的横向列二十四节气，纵向列“昼漏刻”与“夜漏刻”。“昼漏刻”指自旦到昏的时距，“夜漏刻”指自昏到旦的时距，两者之和等于 100 刻。其中大寒“昼漏刻”46.8、“夜漏刻”53.8，必有一误，查与之对称的节气小雪“昼漏刻”46.7，“夜漏刻”53.3，故大寒“夜漏刻”以 53.2 为宜。现将其“夜漏刻”值列于表 1－12 中（表中斜体者为做过校改者，下同）。杨伟景初历沿用东汉四分历的数值，《晋书・律历志下》载有此表，其中大寒“夜漏刻”正为 53.2。由表 1－12 知，东汉四分历二至前后两相对称的节气的“夜漏刻”数不相等，冬至前恒大于冬至后，夏至前均小于夏至后，春、秋二分的“夜漏刻”数亦不相等。刘宋何承天就已注意到这种状况，并正确地指出造成这种状况的原

① 《宋史・律历志九》。

② 《宋史・律历志二》。

表 1—12 诸历二十四节气夜漏刻表

历名 / 节气	东汉四分历景初历夜漏	元嘉历夜漏	大明历夜漏	皇极历夜半漏	麟德历晨前刻	大衍历漏刻	宣明历夜半定漏	应天历晨分	乾元历晨分
冬至	55	55	55	27.43	30	$27\frac{230}{480}$	27.40	2748	808
小寒 大雪	54.2 54.5	54.4	54.4	27.26	$29\frac{54}{72}$	$27\frac{145}{180}$	27.29	2735	801
大寒 小雪	53.2 53.3	53.3	53.3	26.76	$29\frac{8}{72}$	$26\frac{380}{480}$	26.74	2688	787
立春 立冬	51.4 51.8	51.6	51.6	25.985	$28\frac{33}{72}$	$25\frac{475}{480}$	26.10	2612	762
雨水 霜降	49.2 49.7	49.5	49.5	24.965	$27\frac{30}{72}$	$24\frac{470}{480}$	25.09	2508	732
惊蛰 寒露	46.7 47.4	47.1	47.1	23.775	$26\frac{18}{72}$	$23\frac{360}{480}$	23.74	2388	696
春分 秋分	44.2 44.8	44.5	44.5	22.50	25	$22\frac{240}{480}$	22.42	2250	660

续表

清明 白露	41.7 42.2	42.0	41.9	21.225	$23\frac{54}{72}$	$21\frac{120}{480}$	21.10	2112	624
谷雨 处暑	39.5 39.8	39.7	39.6	20.035	$22\frac{42}{72}$	$20\frac{10}{480}$	19.75	1992	588
立夏 立秋	37.6 37.7	37.7	37.6	19.015	$21\frac{37}{72}$	$19\frac{5}{480}$	18.74	1888	558
小满 大暑	36.1 36.2	36.1	36.1	18.23	$20\frac{54}{72}$	$18\frac{100}{480}$	18.10	1812	535
芒种 小暑	35.1 35.3	35.2	35.2	17.69	$20\frac{18}{72}$	$17\frac{335}{480}$	17.55	1765	519
夏至	35	35	35	17.57	20	$17\frac{250}{480}$	17.44	1752	515
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	宋书·律历志下	宋书·律历志下	隋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上	宋史·律历志一	宋史·律历志一

因："案《后汉志》，春分日长，秋分日短，差过半刻。寻二分在二至之间，而有长短，因识春分近夏至，故长；秋分近冬至，故短也。"[①]他认为春分和秋分的昼夜漏刻数理应相等，而二者之差达 0.5 刻，是春分和秋分均后天造成的。

在元嘉历中，何承天也给出了二十四节气昼夜漏刻表，现亦将其值引列于表 1－12 中。由表 1－12 知，何承天二十四节气夜漏刻值除二至与东汉四分历相同外，其余各节气是取东汉四分历表二至前后两相对称节气的夜漏刻数之和折半而得，其中除小满和大暑之外，均用四舍五入的方法。这就是说元嘉历二十四节气昼夜漏刻表并非由实测而得，不过，何承天所建立的二分昼夜漏刻相同，二至前后两相对称节气昼夜漏刻相同的观念对后世产生了极深远的影响。

祖冲之大明历也有二十四节气昼夜漏刻表，其夜漏刻值亦引列于表 1－12 中。同元嘉历相比较，两者仅清明和白露、谷雨和处暑、立夏和立秋等节气相差 0.1 刻。究其实祖冲之也是采用了与何承天相同的方法，从东汉四分历表中推衍而得此表的，大明历与元嘉历二十四节气昼夜漏刻表的差异仅仅是因为是否用四舍五入法而造成的，即祖冲之对于上述清明等节气的夜漏刻值，均未采用四舍五入法。固然这也表明祖冲之所认定的这些节气的夜漏刻值与何承天不同，但它们亦均未由实测而得是显而易见的。

刘焯皇极历则给出了新测得的二十四节气"夜半漏"表格，其值为从昏至旦时距的一半。其数值引载于表 1－12 中。刘焯以前各历法，在应用二十四节气昼夜漏刻表推求任一日昼夜漏刻之数时，均采用一次差内插法。而皇极历则不然，它以文字描述的方式，给出各不同节气每经一日漏刻数递增或递减的不同数值(k_0)。欲求

---

① 《宋书·律历志中》。

某日昼夜漏刻数(k_n),先求该日所值节气,由表可查得该节气的“夜半漏”(k),再以该日入该节气的日数为引数,求得$\sum k_0$值,则$k_n = k \pm \sum k_0$。这自然较为接近一年内昼夜漏刻变化的真实情况。

唐初傅仁均戊寅历不但给出二十四节气“夜漏半”表格,而且还载列与之相关的“日出”和“日入”时刻,以及“一更”和“一筹”的长度①,其表格可引列于表1—13。

表1—13中的有关数值存在以下关系:

(1)夜半漏$=\frac{1}{2}$(“日入”—“日出”)-2.5刻;

(2)一更$=\frac{2}{5}$夜漏半;

(3)一筹$=\frac{1}{5}$一更;

(4)1刻$=24$分。

分值的计算取小数全部舍弃法。表1—13中所列各值已依此类数量关系作了校算,凡与现传本不同者用[ ]示出。

李淳风麟德历二十四节气(定气)昼夜漏刻表纵向给出“晨前刻”、“屈伸率”和“发敛差”三栏。“晨前刻”为各节气从日入到日出间的时距;“屈伸率”为各节气初日漏刻增减量有关的数值;“发敛差”为相邻两“屈伸率”之差乘以$\frac{100}{15}$,即与该节气内每经一日漏刻增减量有关的数值。这三栏各节气的数值均相对于二至前后两两相等。依这些数量关系可对该表格进行校算。立夏、立冬“损二十三”均应为“损二十二”;小暑“屈七分”应为“屈三、七分”;立秋“屈九、二分”应为“屈九、四分”;寒露“损九”应为“损七”;霜降“屈十、十分半”应为“屈十、七分半”。而“晨前刻”各值列于表1—12中。

① 《旧唐书·历志一》。

表 1—13 戊寅历二十四节气日出入、夜半漏及更、筹表

节气＼日出入等	日出	日入	夜漏半	一更	一筹
冬至	辰 24 分之 20	申 7 刻 12 分	27 刻 12 分	11 刻	2 刻 4 分
小寒、大雪	辰 13 分	申 7 刻 19 分	27 刻 5 分	10 刻 21 分	2 刻 4 分
大寒、小雪	卯 8 刻 7 分	酉[初刻]1 分	26 刻 15 分	10 刻 15 分	2 刻[3]分
立春、立冬	卯 7 刻 11 分	酉 21 分	25 刻 19 分	10 刻 7 分	2 刻 1 分
惊蛰、霜降	卯 6 刻 10 分	酉[1 刻]22 分	24 刻 18 分	[9 刻 21 分]	[1 刻 23 分]
雨水、寒露	卯 5 刻 5 分	酉[3 刻]3 分	23 刻 13 分	9 刻 10 分	1 刻 2[1]分
春分、秋分	卯 3 刻 22 分	酉 4 刻 10 分	22 刻[6]分	8 刻 21 分	1 刻 18 分
清明、白露	卯 2 刻 15 分	酉 5 刻 17 分	20 刻 2[3]分	8 刻[9]分	1 刻 16 分
谷雨、处暑	卯 1 刻 1[1]分	酉 6 刻 21 分	19 刻 19 分	7 刻 2[2]分	1 刻 14 分
立夏、立秋	卯 1[1]分	酉 7 刻 21 分	18 刻[19 分]	[7]刻 1[2]分	1 刻 12 分
小满、大暑	寅 8 刻 1 分	戌 7 分	18 刻 1 分	7 刻 5 分	1 刻[10]分
芒种、小暑	寅 7 刻 14 分	戌 18 分	17 刻 14 分	7 刻	1 刻 9 分
夏至	寅 7 刻 12 分	戌 20 分	17 刻 12 分	7 刻	1 刻 9 分

麟德历还给出依上述表格求每日晨前定刻的术文：

> 每气准为一十五日，各置其气屈伸率(a)。每以发敛差(b)损益之，差满十从分，分满十从率一，即各每日屈伸率。各累计屈伸率为刻分，乃以一百八十乘刻分，泛差十一乘纲纪(秋分后为进纲16，春分后为退纪17)而除之，得为刻差(c)，满法(72)为刻。随气所在，以伸减屈加不见漏(d)而半之，为晨前定刻(e)。①

依之可列出以下算式：

$$e=\frac{1}{2}\left(d\pm\frac{c}{72}\right)=\frac{1}{2}\left[d\pm\frac{180}{11\times16(\text{或 }17)\times72}\times\left(na+\frac{n(n-1)b}{200}\right)\right] \quad (1-10)$$

式中：n 为所求日入某节气的日数；d 为“晨前刻”的 2 倍，它与 a、b 均可由上述表格查得。

这里李淳风遵循的是刘焯的思路，但用更为规范化和简捷的方式予以表达和计算。

一行大衍历二十四节气(定气)漏刻表各值亦列于表 1—12 中。大衍历此表纵向除列出“漏刻”值(实即夜漏刻之半)外，还列有“陟降率”和“消息衰”二栏。“陟降率”指各节气内每经一日“消息衰”递增或递减的分值(分母为 100)。“消息衰”为与各节气初日晷长改正值有关的数值，某节气初日的“消息衰”等于其前一节气初日的“消息衰”加或减其前一节气的“陟降率”与其前一节气的定气日数的乘积。对于雨水、清明、处暑和寒露四个节气“陟降率”的变化，与其他节气的“陟降率”依等差级数递增或递减不同，

① 《旧唐书·历志二》。

大衍历另作规定：

> 皆以三日为限。雨水初日，降七十八，初限日损十二、次限日损八、次限日损三、次限日损二、次末限日损一。清明初日，陟一，初限日益一、次限日益二、次限日益三、次限日益八、末限日益十九。处暑初日，降九十九。初限日损十九、次限日损八、次限日损三、次限日损二、末限日损一。寒露初日，陟一，初限日益一、次限日益二、次限日益三、次限日益八、末限日益十二。各置初日陟降率，依限次损益之，为每日率。①

依此可知，雨水初日降78，其后各日分别降66、54、42、34、26、18、15、12、9、7、5、3、2、1。寒露初日陟1，其后各日分别陟2、3、…、78，数值正好同雨水的降率逆数而上。清明初日陟1，其后各日分别陟2、3、5、7、9、12、15、18、26、34、42、61、80、99。处暑初日降99，其后各日分别降80、61、…、1，数值正好同清明的陟率逆数而上。雨水和寒露的“消息衰”应分别较惊蛰和霜降的“消息衰”增或减3.72（现存本此两节气“消息衰”之差正好为此值）；清明和处暑的“消息衰”应分别较谷雨和白露的“消息衰”减或增4.14（现存本《新唐书・历志四上》和《旧唐书・历志三》处暑“消息衰”分别为34.55和24.76，白露“消息衰”为38.90，减去4.14，得34.76，可见《新唐书・历志四上》和《旧唐书・历志三》所载各有正误的部分）。

由大衍历二十四节气漏刻表计算任一日夜半漏刻值，其术曰：

① 《新唐书・历志四上》。

又置消息定衰，满象积(480)为刻，不满为分。各递以息减、消加其气初夜半漏，得每日夜半漏定数。[①]

即：

$$每日夜半漏定数=其气初夜半漏\pm\frac{消息定衰}{480} \quad (1-11)$$

$$消息定衰=某气“消息衰”\pm\frac{n(n-1)\times某气“陟降率”}{200} \quad (1-12)$$

式中：n为所求日入某定气的数值。

依“消息衰”和“陟降率”之间存在的数量关系，以及式(1－11)，还有在上一节中已经提及的式(1－6)，可以对这些相关的数据进行校算。此外，还要指出的是，大衍历二十四节气漏刻表中各定气日数等于平气日数加减盈缩值，如冬至初日到小寒初日的日数等于 $15\frac{664\frac{7}{24}}{3040}-\frac{2353}{3040}$，2353 为盈缩分，可由日躔表查得。以《新唐书·历志四上》所载为准，核算结果为：“立春降 34”应为“降 37”；“谷雨降 32、息 33.56”应为“降 41、息 34.75”；“小满息 20.12”应为“息 20.22”；“芒种息 10.12”应为“息 10.25”；“立秋降 32”应为“降 38”；“处暑消 34.55”应为“消 34.76”；“霜降陟 34、消 24.98”应为“陟 41、消 35.78”；“立冬陟 53、消 29.72”应为“陟 54、消 29.67”；“大雪消 11.13”应为“消 11.18”。又，由式(1－11)可校算得大衍历二十四节气漏刻表中小寒应为 $27\frac{145}{480}$刻[若依上一节中提及的大衍历“距中星度”与“漏刻”的关系式(1－5)，亦可证小寒“漏刻”为 $27\frac{145}{480}$刻]。

---

① 《新唐书·历志四上》。

徐昂宣明历也有二十四节气(定气)漏刻表,纵向列有“夜半定漏”和“屈伸数”[①]两栏,“屈伸数”的含义与大衍历的“消息衰”相似,其算法亦与大衍历同。现将其“夜半定漏”各值亦列于表1—12中。

由王朴钦天历求“晨昏分”[②]术文知,钦天历亦原有昼夜漏刻表,但现传本失载。

王处讷应天历和吴昭素乾元历亦均有二十四节气漏刻表,两历均称之为“晨分”,实即夜漏之半。所给各值,应天历以 10002 为分母,乾元历以 29.4 为分母。现依“晨分”与“距中度”等内在的数量关系,可列二历“晨分”各值于表 1—12 中[③]。应天和乾元二历法在应用该表计算任一日漏刻值时,采用了二次差内插法。每日漏刻值计算的公式化,始自边冈崇玄历,史序仪天历以后均继承之,详见第二章第六节。

三、二十四节气日出入时刻表

按理说,二十四节气昼夜漏刻表应是由二十四节气日出入时刻的测量结果推衍而得的,可是隋代以前各历法均不载二十四节气日出入时刻表,却反过来用派生出来的二十四节气昼夜漏刻表来进行二十四节气等的日出入时刻的推算。在隋代张胄玄大业历中,我们才首次见到第一份二十四节气日出入时刻表格,其横向列二十四节气,纵向有“日出”和“日入”[④]二栏,其具体数值可列于表 1—14 中。

---

① 《新唐书·历志六上》。

② 《新五代史·司天考一》。

③ 陈美东,李东生:《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》,《自然科学史研究》,1990 年,第 1 期。

④ 《隋书·律历志中》。

表 1—14　大业历和韩显符二十四节气日出入时刻表

历名等 / 节气	大业历			韩显符《铜浑仪法要》		
	日出	日入	夜漏刻	日出	日入	夜漏刻
冬至	晨$\frac{50}{68}$	申7$\frac{30}{68}$	59$\frac{65.3}{68}$	卯$\frac{144.5}{147}$	申3$\frac{51.5}{147}$	59$\frac{142}{147}$
小寒 大雪	辰$\frac{32}{68}$	申7$\frac{48}{68}$	59$\frac{29.3}{68}$	卯4$\frac{119.5}{147}$	申3$\frac{76.5}{147}$	59$\frac{92}{147}$
大寒 小雪	卯8$\frac{19}{68}$	酉$\frac{1}{68}$	58$\frac{18}{68}$	卯4$\frac{34.5}{147}$	申4$\frac{14.5}{147}$	58$\frac{69}{147}$
立春 立冬	卯7$\frac{28}{68}$	酉$\frac{52}{68}$	56$\frac{44}{68}$	卯3$\frac{56.5}{147}$	申4$\frac{139.5}{147}$	56$\frac{113}{147}$
惊蛰 霜降	卯6$\frac{25}{68}$	酉1$\frac{55}{68}$	54$\frac{38}{68}$	卯2$\frac{58.5}{147}$	申5$\frac{137.5}{147}$	54$\frac{117}{147}$
雨水 寒露	卯5$\frac{13}{68}$	酉3$\frac{7}{68}$	52$\frac{6}{68}$	卯1$\frac{40.5}{147}$	申7$\frac{8.5}{147}$	52$\frac{81}{147}$
春分 秋分	卯3$\frac{55}{68}$	酉4$\frac{25}{68}$	49$\frac{30}{68}$	卯初	酉初	50
清明 白露	卯2$\frac{37}{68}$	酉5$\frac{43}{68}$	46$\frac{62}{68}$	寅7$\frac{8.5}{147}$	酉1$\frac{40.5}{147}$	47$\frac{66}{147}$
谷雨 处暑	卯1$\frac{28}{68}$	酉6$\frac{52}{68}$	44$\frac{44}{68}$	寅5$\frac{127.5}{147}$	酉2$\frac{68.5}{147}$	45$\frac{10}{147}$
立夏 立秋	卯$\frac{28}{68}$	酉7$\frac{52}{68}$	42$\frac{44}{68}$	寅4$\frac{119.5}{147}$	酉3$\frac{76.5}{147}$	42$\frac{141}{147}$
小满 大暑	寅8$\frac{3}{68}$	戌$\frac{17}{68}$	41$\frac{8.7}{68}$	寅3$\frac{146.5}{147}$	酉4$\frac{49.5}{147}$	41$\frac{48}{147}$
芒种 小暑	寅7$\frac{36}{68}$	戌$\frac{44}{68}$	40$\frac{14.7}{68}$	寅3$\frac{71.5}{147}$	酉4$\frac{124.5}{147}$	40$\frac{45}{147}$
夏至	寅7$\frac{30}{68}$	戌$\frac{50}{68}$	40$\frac{2.7}{68}$	寅3$\frac{51.5}{147}$	酉4$\frac{144.5}{147}$	40$\frac{5}{147}$

由“日入”时刻减去“日出”时刻，我们可以算得大业历的夜漏刻，亦列于表1—14中。大业历所用的辰刻制度是一日百刻，一辰

$8\frac{22\frac{2}{3}}{68}$刻，自子初到子正、从子正到丑初等均为$4\frac{11\frac{1}{3}}{68}$刻，子初始于夜半之前$4\frac{11\frac{1}{3}}{68}$刻，夜半即为子正。丑初等均可依此类推。

在本节上一小节中，我们已经提及傅仁均戊寅历所载日出入时刻表(见表1－13)，其所用辰刻制度与大业历无异，其日出入时刻与大业历均小有不同，但由天算得的夜漏半却与大业历的夜漏刻之半基本相同。细察之，这是由于戊寅历二十四节气日出入时刻均较大业历偏大，每节气偏大的幅度又大略相等。这是一种很奇特的现象。

在北宋韩显符的《铜浑仪法要》中亦载有“二十四节气昼夜进退、日出入刻数立成之法”[①]，其纵向设“日出”、“日没”、“昼刻”和“夜刻”四栏，现取其三栏载于表1－14中(其“昼刻”＝100－“夜刻”)。其所用辰刻制度与隋及唐初不同，以夜半作为子初之始，每经$8\frac{49}{147}$刻，进一时辰。

赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历载有相同的“二十四气陟降及日出分”[②]表。其横向列二十四节气，纵向有“增损差”、“加减差”、“陟降率”、“初、末率”和“日出分”五栏。“日出分”$\times\frac{12}{313.8}$＝日出刻，是为某节气时太阳出地平面的分值或刻数(均从夜半起算)。“陟降率”为相邻两节气初日之间“日出分”之差。“初、末率”系指某节气初日和末日“日出分”的变化量。“增损差”、“初”和“末”系指某节气初日和末日“初、末率”的变化量。“加减差”系指某节气每经一日“增损差”

① 《宋史・律历志三》。
② 《金史・历志上》,《元史・历志五》。

的变化量。现将该表的一部分引列于表1—15。

表1—15　重修大明(庚午)历二十四节气陟降及日出分表

节气＼日出分等	增损差	加减差	陟降率	初、末率	日出分
冬至	增 初0.0926 末0.0796	减0.001	陟10.40	初0.0550 末1.2604	1567.92
小寒	增 初0.0789 末0.0659	减0.001	陟28.73	初1.3600 末2.3736	1557.52
大寒	增 初0.0652 末0.0522	减0.001	陟43.56	初2.4300 末3.2518	1528.79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$某节气“日出分”＝前节气“日出分”\pm前节气“陟降率”$$

$$某节气“末率”＝某节气“初率”\pm\frac{某节气“增损差初、末”之和}{2}\times14$$

$$某节气“加减差”＝\frac{某节气“增损差初、末”之差}{13}$$

$$\frac{某节气“增损差初、末”之和}{2}＝\frac{某气节“初、末率”之差}{14}$$

这些是可以从表1—15得出的数量关系。应用该表即可算得每日日出分，其术曰：

> 各以陟降初率，陟减降加其气初日日出分，为一日下日出分。以增损差(仍加减加减差)增损陟降率，驯积而加减之，即为每日日出分。复减日法(5230)，余为日入分。①

① 《金史·历志上》，《元史·历志五》。

第六节　二十四节气太阳视赤纬表和月亮极黄纬表

一、二十四节气太阳视赤纬表

二十四节气太阳视赤纬表首见于东汉四分历中。它是以表格的方式给出的，横向列二十四节气，纵向栏称“黄道去极”，也是刘洪和蔡邕经实测而得的。它们实际上是太阳视赤纬的余角，即1象限度±“黄道去极”，是为太阳视赤纬值。在此之前，至迟在汉和帝永元年间已有此类表格当无疑问。东汉四分历所给值可引列于表1－16中。

杨伟景初历二十四节气太阳视赤纬表系沿用东汉四分历之值。据《晋书・律历志下》和《宋书・律历志中》记载，其立春、春分和小满“日行黄道去极度”均分别为“106少弱”、“89少弱”和“69太”，与东汉四分历所载不同，姑两存之。我们更倾向于认为《晋书》和《宋书》律历志所载立春“106少弱”是可信的，因为现传本《续汉书・律历志下》原即记为此值，而作“校勘记”者将其改作“106少强”。

在此后相当长的时间内，历家均不列此表，到唐代李淳风麟德历才给出新表，称“黄道去极度”。李淳风还给出由此表计算每日太阳视赤纬值的方法，其术曰：

> 置刻差(c)，三十而一为度。不满三［十］约为分。伸减屈加其气初黄道度(f_0)，即每日所求(f)。[①]

① 《旧唐书・历志二》。

表 1－16 诸历二十四节气太阳视赤纬表

节气＼历名	东汉四分历、景初历	麟德历	大衍历	宣明历	应天历
冬至	115	115.3	115.20	$115\frac{17}{84}$	115.20
小寒、大雪	113 强、113 大强	114.1	114.35	$114\frac{46}{84}$	114.58
大寒、小雪	110 大弱、111 弱	111.7	111.90	$112\frac{25}{84}$	112.32
立春、立冬	106 少强(少弱)、107 少强	107.9	108.05	$108\frac{55}{84}$	108.67
雨水、霜降	101 强、102 少强	102.9	103.20	$103\frac{67}{84}$	103.81(82)
惊蛰、寒露	95 强、96 大强	97.3	97.30	$97\frac{80}{84}$	97.93(91)
春分、秋分	89 强(少弱)、90 半强	91.3	91.30	$91\frac{25}{84}$	91.31
清明、白露	83 少弱、84 少强	85.3	85.30	$84\frac{55}{84}$	84.67
谷雨、处暑	77 大强、78 半强	79.7	79.40	$78\frac{67}{84}$	78.79
立夏、立秋	73 少弱、73 半强	74.7	74.55	$73\frac{80}{84}$	73.92
小满、大暑	69 大弱(太)、70	70.9	70.70	$70\frac{25}{84}$	70.72
芒种、小暑	67 少弱、67 大强	68.5	68.25	$68\frac{4}{84}$	68.02
夏至	67 强	67.3	67.40	$67\frac{34}{84}$	67.39
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上	宋史·律历志二

这里“刻差”即为式(1—10)中的c值，则有：

$$f=f_0\pm\frac{c}{30} \qquad (1-13)$$

东汉四分历和景初历在应用二十四节气太阳视赤纬表求算任一日的太阳视赤纬值时，是依一次差内插法。而李淳风则已将各节气间太阳视赤纬的变化描述为是按等差级数变化的。实际上式(1—13)也为我们对麟德历二十四节气视赤纬表进行校算提供了依据，即表中两相邻节气的“晨前刻”之差的2倍乘以72，除以30，应等于两相邻节气“黄道去极度”之差。这就是说：

“黄道去极度”之差＝4.8×“晨前刻”之差

＝2.4×昼(或夜)漏刻之差

亦即昼(或夜)漏刻每增减1刻，黄道去极度则增减2.4度。昼(或夜)漏刻与黄道去极度变化的这一数量关系，霍融在汉和帝永元十四年(104)便已指出：“漏刻以日长短为数，率日南北二度四分而增减一刻”①。李淳风只是应用了霍融早已提及的数量关系(依此关系考察东汉四分历所载昼夜漏刻与黄道去极度各值，并不全合，这说明刘洪、蔡邕似更注重由实测而得的结果)。依之，可将对麟德历二十四节气视赤纬表的校算结果列于表1—16中，其中斜体者为校改后的数值(当然，二至前后对称的节气的太阳视赤纬两两相等，亦可为校改的又一途径)。

一行大衍历亦载有二十四节气(定气)太阳视赤纬表(见表1—16)，大衍历二十四节气太阳视赤纬值与漏刻值之间也存在霍融所述的数量关系。大衍历又有求每日太阳视赤纬值之术：

又置消息定衰，满百为度，不满为分。各递以息减、

---

① 《续汉书·律历志中》。

消加气初去极度，各得每日去极定数。[①]

即：

每日去极定数＝某气初去极度±消息定衰/100 (1—14)

此中“消息定衰”即如式(1—6)所示。

依式(1—14)，我们也可以对上一节中关于“陟降率”和“消息衰”值校正的可靠性进行验证。复算说明其校正是可信的，由之算得的“黄道去极度”有些不与表载值密合，这是因为表载值的分值已被一行有意识地表达为20、35等规整值，所以有些表载值与计算值存在5分以下的差异是正常的。

徐昂宣明历和王处讷应天历亦给出二十四节气“黄道去极度”表(其值亦引列于表1—16中)，由之可见，应天历乃取用宣明历之值，两者之差均不大于0.03度。其中清明和白露应天历载为84.77，而宣明历载为84 $\frac{55}{84}$＝84.65，故应天历亦改作84.67。又，应天历惊蛰载为97.93，而与之相对称的寒露载为97.91，由宣明历惊蛰和寒露均为97 $\frac{80}{84}$＝97.95，则应天历寒露宜改作97.93。宣明历二十四节气黄道去极度与夜半定漏之间并不存在如霍融所说的数量关系，而应天历的二十四节气黄道去极度与晨分之间大多符合霍融所述的数量关系，其不合者，显然是受宣明历的影响所致。

此后各历均采用边冈在崇玄历中开创的公式算法，这在第二章第五节中还要进一步讨论。

① 《新唐书·历志四上》。

二、月亮极黄纬表

月亮极黄纬表首见于刘洪乾象历，称为月行“阴阳历”。其后，何承天元嘉历和祖冲之大明历均沿用与乾象历相同的表格。这里所谓月亮极黄纬是指月亮距黄道南北的度值。该表格横行自黄白交点始，每隔一日设一栏，13 日余，共 14 栏（乾象历以恒星月长度之半入算，不够严密，而元嘉历和大明历均以交点月长度之半入算，趋于完善）。纵行设有三栏：“兼数”——某日月亮极黄纬分值；“损益率”——相邻两天月亮极黄纬分值之差；“衰”[①]——相邻两天月亮极黄纬分值差之差（均以 12 为分母）。

刘焯皇极历和李淳风麟德历也给出月亮极黄纬表，横向栏之设同元嘉历；但其纵向设有二栏，皇极历称“去交衰”和“衰积”[②]，麟德历称“去交差”和“差积”[③]（均以 10 为分母），其含义均分别与乾象历的“损益率”和“兼数”相当。

一行大衍历月亮极黄纬表的横向栏改为 24 栏，即从黄白交点开始每隔$\frac{周天度}{24}$设一栏，称为“少阳初、少阳二、…、少阳五、少阳上、老阳初、老阳二、…、老阳五、老阳上、少阴初、少阴一、…、少阴五、少阴六、老阴初、老阴二、…、老阴五、老阴上”，合称为“爻目”。纵向设有三栏：“加减率”——相邻两爻月亮极黄纬分值之差；“阴阳积”——某爻月亮极黄纬分值；“月去黄道度”[④]——某爻月亮极黄纬度分值（均以 120 为分母）。前者与乾象历的“损益率”相当，而后二者均与“兼数”相当。

在应用上述表格进行任一时日的月亮极黄纬值（p）的计算

---

① 《晋书·律历志中》。
② 《隋书·律历志下》。
③ 《旧唐书·历志二》。
④ 《新唐书·历志四下》。

时，各历法所取算法有所不同，现分述如次。

乾象历、元嘉历和大明历应用的是一次差内插法。以大明历为例，其算法为：

求月去日道度(p)：置入阴阳历余(n)乘损益率(Δ_1)，如通法(26377)而一，以损益兼数(P_m)为定数，定数十二而一为度……则月去日道度也。[①]

依之则有：

$$p=\frac{1}{12}\left(P_m\pm\frac{n\cdot\Delta_1}{26377}\right) \tag{1-15}$$

式中n为所求时日与月亮过黄白交点时之间的日距之余数，该余数是以通法为分母的通分值的形式出现的，故需以通法除之，然后入算。由上式知，其算法当为一次差内插法无疑。

皇极历的计算法有如下述：

求月入交去日道：皆同其数，以交余为秒积(n)，以后衰(Δ_2)并去交衰(Δ_1)，半之，为通数$\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)$。进，则秒积减(衰)[交]法(7356366)，以乘衰($\Delta_1-\Delta_2$)，交法除，而并衰以半之；退者，半秒积以乘衰，交法而一，以减衰讫皆加通数，秒积乘，交法除，所得以进退衰积(P_m)，十而一为度，不满者求其强弱，则月去日道数(p)。[②]

这里"交余"系指所求时日与月亮过黄白交点时之间的日距之余数，需以交法乘之，所得n值，才能达到"同其数"的要求。而

① 《宋书·律历志下》。
② 《隋书·律历志下》。

"后衰"(Δ_2)则指相邻两日 Δ_1 值之差。那么,依上术文遂有下式:

对于进时(指 $p>P_m$ 时):

$$p=\frac{P_m}{10}+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(7356366-n)(\Delta_1-\Delta_2)}{7356366}+(\Delta_1-\Delta_2)\right]+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right\}\times\frac{n}{7356366\times 10}$$

此式可简化为:

$$p=\frac{1}{10}\left\{P_m+\left[(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{(\Delta_1-\Delta_2)n}{7356366\times 2}+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right]\frac{n}{7356366}\right\} \tag{1-16}$$

该式也正与术文中对于退时(指 $p<P_m$)的算式相符,仅有的不同是 P_m 之后当为"-"号。这就是说,皇极历是应用了等间距二次差内插公式。

李淳风的麟德历亦有"求月入交去日道远近术"①,察其算法则与皇极历完全相同。其术文中"退者,半入余以乘差,总法而一"句后,亦脱"以减差"三字,应增补之。

有人认为大衍历月亮极黄纬数值表格中"阴阳积"推至四次差时恒等于0,这应是一行在依表格做进一步计算时试图应用三次差内插法的表征,而且认为其求"月去黄道定数"术也表明一行发明了三次差内插法的近似公式②。但也有人认为,"月去黄道定数"术乃不脱二次差内插法的范畴,并无三次差内插法的涵义③。

① 《旧唐书·历志二》。

② 严敦杰:《中国古代数理天文学的特点》,《科技史文集》第1辑,1978年。

③ 曲安京,纪志刚,王荣彬:《中国古代数理天文学探析》,西北大学出版社,1994年,第281~283页。

第七节　月离表和日躔表

一、月离表

月离表是关于月亮运动不均匀性改正的数值表。它首见于东汉刘洪乾象历中，一开始便是以表格的形式给出。其横向栏以月亮一近点周的日数为序，其纵向栏列出月亮每日实行度分等（各历法纵向栏目数不等，详见后），而纵横栏交错处所列数值，即为某日的月亮实行度分等。历代绝大多数历法都给出了月离表，其基本结构自刘洪乾象历便已大致确定了下来，其内涵（亦即纵向各栏）依出现年代的先后可陈述于下。

其一，月亮每日实行度分值，首见于乾象历。它列出“日转度分”和“月行分”二栏，前者为月亮每日实行度分值，后者为每日月亮的实行分值，两者实际上是一回事，只是所取单位不同而已。

现所知历法中给出“日转度分”值的历法另有11种，分别称“月行迟疾度”（景初历和元嘉历）、“月行度”（大明历）、“月行迟疾度及分”（正光历与兴和历）、“逡程”（五纪历、正元历）、“离度”（乾元历）、“历定度”（仪天历）、“转定度”（授时历）等；给出“月行分”值的历法另有25种，分别称“月行分”（景初历）、“转分”（大业、大衍、五纪、正元和崇玄等历）、“速分”（皇极历）、“行分”（戊寅历）、“离程”（麟德历）、“历分”（宣明历）、“离分”（应天历）、“离差”（乾元历）、“历定分”（仪天历）、“转定分”（崇天、观天、纪元、统元、乾道、会元、淳熙、统天、开禧、重修大明、成天、庚午等12历）。

月亮每日实行度分值是月离表最基本的数据，它们应是历家在对月亮运动进行一段时间实测的基础上求算而得的，是从若干个近点周（以月亮近地点或远地点作为起始点）的逐日实测值中所取的某种平均值。也就是说，它们应是导致月亮运动不均匀的

有关因素(中心差、出差、二均差等)的综合影响的结果。月离表的其他各项内容或者是由之衍生而来,或者与之有极密切的关系。

其二,相邻两天月亮实行度分值之差,首见于乾象历,名曰“列衰”,与之取名相同者还有大衍、五纪、正元和仪天等历。此外还有 14 种历法给出该值,分别名曰“列差”(元嘉历和崇玄历)、“转法”(大业历)、“速差”(皇极历)、“离差”(麟德历)、“进退衰”(宣明历和纪元历)、“历衰”(崇天历)、“进退差”(观天、统元、淳熙、统天、开禧和成天等历)。

其三,月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差,首见于乾象历,名曰“损益率”,景初、元嘉、正光、兴和、大业、戊寅等 6 种历法均与之同。而崇天历和观天历称之为“增减差”,纪元、统元、乾道、会元、统天、开禧、成天等 7 种历法称之为“加减差”。

其四,月亮每日实行度分与月亮每日相对于恒星的平均度分之差的累积值,亦首见于乾象历,名曰“盈缩积”,另有 20 种历法列有此值,其名称分别为“盈缩积分”(景初、元嘉、大明、大业和戊寅 5 历)、“盈缩并”(正光历)、“盈缩并率”(兴和历)、“迟疾度”(如上述崇天等 12 历再加上授时历)。

其五,每天月亮实行分与太阳每日平行分之差,首见于元嘉历,名曰“差法”。此值仅大明历和大业历继续采用,所取名称相同。

其六,月亮相对于恒星运行 1 分(指度分的分)时,月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差,首见于大明历,名为“损益率”。大衍历及其后所有历法(授时历除外)均给出该值,其中,除皇极历和麟德历分别称之为“加减”和“增减率”之外,其他各历均与大明历一样以“损益率”名之。需特别注意的是,这里所谓“损益率”与上述乾象历等中的“损益率”名同而实异,不可混同。

其七，月亮相对于恒星运行1分时，月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差的累积值，首见于正光历，名曰“盈缩积分”，此外还有22种历法给出此值，其名称分别为：“朓朒积”（皇极、五纪、正元、宣明、崇玄和大衍6历）、“迟速积”（麟德历）、“先后积”（应天历）、“阴阳差”（乾元历）、“升平积”（仪天历）、“朏朒积”（崇天、观天、纪元、统天、开禧和成天6历）、“朏朒数”（统元、乾道、会元、淳熙4历）、“朏朒率”（重修大明历和庚午历）。

其八，月亮每日实行度分的累积值，首见于大衍历，名曰“转积度”，五纪、正元、崇玄、崇天和授时5历均与之相同；称之为“积度”者，有宣明、应天、重修大明和庚午4历；而仪天历名之曰“历积度”，统天历名之曰“转日度”。

历代月离表的内容大抵不出上述八项。依它们之间存在的数量关系，可对历代月离表作校勘，我们发现需作更改者达250处左右[①]。

在刘焯皇极历以前各历法，在应用月离表计算月亮运行的有关度值时，均用一次差内插法。而在皇极历及其以后，则以等间距二次差内插法求算之。据研究，依刘焯皇极历“推朔弦望定日术”，可列出下式[②]：

$$f(n+s)=f(n)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+s(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) \tag{1-17}$$

式中，$f(n)$为某日的“朓朒积”，s为入某日的平朔时刻数，Δ_1和Δ_2分别为某日和下一日的“加减”，$f(n+s)$即为月亮运行不均匀性导致的对平朔时刻的改正值。

---

① 陈美东，张培瑜：《月离表初探》，《自然科学史研究》，1987年，第2期。

② 李俨：《中算家的内插法研究》，科学出版社，1957年，第31页。

在徐昂宣明历中更将上式简化为[①]：

$$f(n+s)=f(n)+s\Delta_1+\frac{s}{2}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) \quad (1-18)$$

式中 Δ_1 和 Δ_2 分别为某日和下一日的“损益率”，$f(n+s)$、$f(n)$和s的含义均与上式相同。

如果将刘洪首创并被后世历家广泛采用的，以一日作为一限的月离表统称作传统月离表，那么五代王朴钦天历和元代郭守敬授时历则曾给出了非传统的月离表。据《新五代史·司天考一》载，王朴将“一日之中，分为九限。每限损益，衰稍有伦，朓朒之法，可谓审矣”。王朴钦天历一近点月的长度为 $27\frac{3993.09}{7200}$日，乘以9，得248，即王朴是将一近点周均分为248限，也就是说其月离表的横向设有248栏，这显然要比传统月离表精细得多。钦天历“月离朓朒”术曰：

> 置入历分，以日躔朓朒定数，朓减、朒加之，程节(800)除之，为限数。余乘所入限损益率，程节而一，用损益其限朓朒为定数。

这里“入历分”指所求时日同近地点时距的分值（分母为7200），此分值需经太阳运动不均匀性的改正，设改正后的分值为$T=\frac{T}{7200}$日，已知$27\frac{3993.09}{7200}$日适为248限，则1限＝$\frac{27\frac{3993.09}{7200}}{248}$日，$\frac{T}{7200}$日相当于$\frac{248T}{27\frac{3993.09}{7200}\times 7200}$限＝$\frac{T}{800}$限，这就

① 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964年，第107页。

是钦天历"程节"为800的来由。从该术文可知,钦天历月离表纵向至少应有"损益率"和"朓朒"二栏,其含义即上述"其六"和"其七"所示者。而且在求得限数及其余数以后,是以一次差内插法做进一步的推算的。所以,王朴加细月离表的主要动因之一应是使计算便捷。至于他是如何推得各限的"损益率"和"朓朒"的,我们推想可能是应用从实测而得的以一日为一限的月离表,依二次差内插法推出此二值,遂成248限月离表,这实际上是以二次差内插公式算法为基础的、简便的表格算法。

郭守敬授时历既给出以一日为一限的传统月离表,应用该表计算时是取三次差内插法(见第二章第二节)。同时,授时历又给出将一日分为12.2限(其一近点月等于27.5546日)的336限月离表,即横向分336栏,纵向则至少设有"损益分"和"迟疾度"二栏(其含义即上述"其三"、"其四"),在应用336限月离表时亦取一次差内插法。郭守敬构造此月离表的思路与王朴无异,当然应用三次差内插法是他较王朴更高明之处。

据研究[①],由历代月离表所列月亮每日实行度的测量平均误差为15′.8。其中,刘洪乾象历首创月离表便已达较高精度(平均误差为11′.7),而大明、皇极、乾元、统元、授时等5种历法的平均误差均为10′左右,是为诸历中的佼佼者,崇玄历的平均误差为7′.0,是为最佳者。

二、日躔表

日躔表是关于太阳运动不均匀性改正的数值表,首见于刘焯皇极历。它以表格形式给出。其横向以十二个月份和相应的二十四节气为栏目(张胄玄大业历同此,而自傅仁均戊寅历开始,各

① 陈美东,张培瑜:《月离表初探》,《自然科学史研究》,1987年,第2期。

历法均省去十二个月份名)；纵向含有“躔衰”、“衰总”、“陟降率”和“迟疾数”四个栏目；纵横交错处所列数据，即某节气“躔衰”等值。“躔衰”——相邻的节气初日太阳实行度分值与平行度分值之差(以“日干元”52为分母)；“衰总”——冬至初日到某节气初日之间太阳实行度分值与平行度分值之差，亦即始于冬至到某节气初日“躔衰”的累积值；“陟降率”——因“躔衰”所引导致的平朔望时刻改正日数的分值(以“朔日法”1242为分母)，它应等于

$\frac{\text{“躔衰”}\times 1242}{\text{月亮每日平行度}\times 52}$(皇极历月亮每日平行度为13.36879度)；“迟疾数”——“陟降率”的累积值。

此后绝大多数历法均给出与之相类似的日躔表，只是各历法所取纵向各栏的名称有所不同，所取用的分母名称和大小亦各不相同而已。它们与皇极历所取名称和大小相对应的各栏的状况可列如表1—17。

自北宋王处讷应天历开始，多数历法日躔表纵向又增加“常数”一栏(其后各历法的名称稍异，亦见于表1—17中)，其意均为自冬至到各节气初日太阳的平均行度，它们分别等于某节气到冬至的节气数乘以$\frac{\text{周天度分}}{24}$。

历代日躔表的结构与内涵大抵如此，但内中有若干历法小有变化，特说明如下：

王处讷应天历需以“冬至常数”减“定日”、“常数”减“盈缩准”才分别得同皇极历“躔衰”、“衰总”相当者。此外，“损益准”的含义不清；“先后积”依前述方法计算的结果与现传本表列值均稍有不同，其因不明。均有待进一步查考。

赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历的日躔表是将传统的日躔表析为二表：“二十四气日积度及盈缩”和“二十四气中积及朓朒”。两表纵向除了都有“损益率”、“初、末率”和“日差”(两表

表 1—17　皇极历及其他各历法日躔表纵向栏名称与分母值表

皇极	躔衰	衰总	日干元 52	陟降率	迟疾数	朔日法 1242		隋书·律历志下
大业	损益率	盈缩数	日法/10 114.4					隋书·律历志中
戊寅	同上	同上	气时法 1183					新唐书·历志一
麟德	躔差率	消息总	总法 1340	先后率	盈朒积	总法 1340		新唐书·历志二
大衍	盈缩分	先后数	通法 3040	损益率	朓朒积	通法 3040		新唐书·历志四上
五纪	同上	同上	通法 1340	同上	同上	通法 1340		新唐书·历志五
正元	同上	同上	通法 1095	同上	同上	通法 1095		同上
宣明	同上	同上	刻法 84	同上	同上	统法 8400		新唐书·历志六上
崇玄	升降差	盈缩分	10000	损益数	同上	通法 13500		新唐书·历志六下
应天	冬至常数减定日	常数减盈缩准	同上	损益准？	先后积？	元法 10002	常数	宋史·律历志一
乾元	阴阳分	阴阳度	元率 2940	损益率	阴阳差	元率 2940		同上

续表

崇天	升降分	盈缩分	10000	损益率	朏朒积	枢法 10590	中积	宋史·律历志五
纪元	盈缩分	先后数	同上	同上	同上	日法 7290	中积日	宋史·律历志十二
统元	同上	升降差	同上	同上	同上	元法 6930	中积及余	宋史·律历志十六
乾道	同上	同上	同上	同上	同上	元法 30000	同上	同上
淳熙	同上	同上	同上	同上	同上	元法 5640	同上	同上
重修大明	损益率	盈缩积	同上	同上	朓朒积	日法 5230	中积经分、约分	金史·历志上
会元	盈缩分	升降差	同上	同上	朏朒积	统率 38700	中积及余	宋史·律历志十六
统天	同上	升降分	同上	同上	同上	策法 12000	中积日及余	宋史·律历志十七
开禧	同上	同上	同上	同上	同上	日法 16900	同上	同上
庚午	损益率	盈缩积	同上	同上	朓朒积	日法 5230	中积经分、约分	元史·历志五
成天	盈缩分	升降分	同上	同上	朏朒积	日法 7420	中积日及余	宋史·律历志十七
授时	盈缩加分	盈缩积	日周 10000					高丽史·卷五十二、古今律历考·卷四十

具体数值各异)三栏外,前表还有“日积度分秒”和“盈缩积”两栏,后表还有“中积经分、约分”和“朓朒积”两栏。前表“损益率”和“盈缩积”、后表“损益率”和“朓朒积”的含义分别与皇极历的“躔衰”和“衰总”、“陟降率”和“迟速数”相同。后表“中积经分、约分”与应天历的“常数”之意相同。而前表“日积度及分秒”即为各节气相对于冬至的太阳实行度,等于各节气相对于冬至的太阳平行度加上“盈缩积”。令“损益率”/平气日数(15.2185),即某节气内每经一日“损益率”的平均变动值,可称之为“中率”。前表中的“日差”等于相邻两节气的“中率”/平气日数,是为某节气内每经一日“中率”的平均变动值。于是前表的“初、末率”应等于“中率”$\pm\frac{\text{“日差”}\times(\text{平气日数}-1)}{2}$。后表“中积经分、约分”分别指平气日数的分数值与小数值。而后表的“初、末率”和“日差”的求取方法则与前表相同。

郭守敬授时历的日躔表与传统日躔表以一节气设一横向栏不同。它是以一日设一栏,计 365 栏,其纵向计有四栏:“盈缩加分”是指每经一日的太阳实行度与平行度的差值;“盈缩积”是指某一日与冬至(或夏至)间太阳实行度与平行度差的累积值;“行度”指每经一日的太阳实行度值;“日差”系指相邻两日间太阳实行度之差。

由上述各纵向栏之间存在的数量关系,可对现传本各历法日躔表进行校算,发现隋唐各历法日躔表均无误,而自北宋及元代各历需校补者至少达 150 处①。

对历代日躔表内涵的分析可知,对各节气太阳实行度的实测值是日躔表的核心数据。在若干历法中,此核心数据存在着明确的传承关系:麟德历同皇极历;五纪历和正元历同大衍历,崇玄历

① 陈美东:《日躔表之研究》,《自然科学史研究》,1984 年,第 4 期。

仅与大衍历小异；而乾元历同崇玄历；应天历同宣明历，统元历仅与宣明历小异；淳熙、重修大明和庚午三历同纪元历。这就是说并非所有日躔表都是实测的结果。

自刘焯皇极历开始，在应用日躔表进行与太阳运动不均匀性有关的各项改正值计算时，就采用了等间距二次差内插法；一行则使用了不等间距二次差内插法①；而王恂、郭守敬等更发明了三次差内插法。这些计算方法一般都以文字表述的形式附于日躔表之后。而重修大明历和庚午历则在日躔表中列出同二次差内插法有关的数值（即前述“初、末率”、“日差”等）。授时历365横栏日躔表则是应用了三次差内插法进行计算而列出的（见第二章第二节）。在应用此表进行计算时仅用一次差内插法即可，其基本思路与授时历的336栏的月离表相通。

据研究②，历代历法日躔表的精度情况是：关于二十四节气太阳实行度值测定的平均误差，隋及唐初在10′左右，唐一行大衍历降至6′.6，自此到北宋在5′到6′间，北宋末姚舜辅纪元历及至元郭守敬授时历更降至4′左右，其中以刘孝荣会元历平均误差为3′.6，是为最佳结果。关于平朔望时日改正的平均误差，隋唐及北宋时期各历法在2.7～3.4刻之间变动，北宋纪元历以后各历法则在2.1～2.5刻之间变动，其中也以刘孝荣会元历获最佳结果。质言之，日躔表的编制肇自北齐张子信关于太阳运动不均匀性的发现，刘焯和张胄玄差不多同时将其引进历法，改善了定朔、太阳所在位置、交食以及五星运动等天文历法问题的推算。此后一行大衍历改进了日躔表，对太阳运动不均匀的总体描述趋于科学与合理，准确度有所提高。又其后，北宋末姚舜辅纪元历又使日躔表进一步精密化，并对后世产生很大影响。

---

① 李俨：《中算家的内插法研究》，科学出版社，1957年，第46页。

② 陈美东：《日躔表之研究》，《自然科学史研究》，1984年，第4期。

第八节 黄赤道、黄白道和赤白道度差表

一、黄赤道度差表

黄赤道宿度之间坐标变换法的研究，始于东汉张衡。张衡在《浑天仪注》中以文字方式最早予以描述①。张衡是在特制的圆球上绘出黄赤道，用竹篾度量黄赤道度的变化，进而归纳出两者进退规律的。所谓黄道度乃是沿赤经圈在黄道上量取的度值，可称之为极黄经，同现今所说的黄经是不同的。所以，本节所讨论的黄赤道差应相当于赤经与极黄经之差。东汉末刘洪最先将张衡的研究成果引进他的乾象历中，并给予更简要的文字描述：

> 进退有差，起二分度后，率四度转增少，少每半者，三而转之，差满三止，历五度而减如初。②

这是说从春分到夏至、秋分到冬至之间(各 91.31 度)黄赤道度变换的方法。自春分、秋分开始，赤道度每经 4 度，黄道度增 1/4度，如此者三，此后经 3 度亦增 1/4 度，于是每经这样 15 度而增 1 度。依此重复 3 次，于是经 45 度而增 3 度，此后转而为减。因为从春分(或秋分)到夏至(或冬至)计 91.31 度，刘洪指出，开始减 1/4 度的度距为 5 度，即“历五度而减如初”，严格地说应为历 5.31 度。此后则每经 4、4、3、4、4、4、3、4、4、4、3 度而减 1/4 度，到夏至(或冬至)黄赤道度相等。依此可列出表 1—18。至于从夏至到秋分、冬至到春分之间黄赤道度的变换也列于表 1—18 中。

---

① 陈美东:《张衡〈浑天仪注〉新探》,《社会科学战线》,1984 年,第 3 期。

② 《晋书·律历志中》。

表 1—18 乾象等历黄赤道度差表

乾象历 赤道度	乾象历 黄道度 分到至	乾象历 黄道度 至到分	皇极历 赤道度	皇极历 黄道度 至到分	皇极历 黄赤道度差	皇极历 每限增损数	皇极历 黄道度 分到至
4	4.25	3.75	4	3.78	$-\frac{97}{450}$	$-\frac{97}{450}$	4.22
8	8.5	7.57	8	7.57	$-\frac{195}{450}$	$-\frac{98}{450}$	8.43
12	12.75	11.25	12	11.35	$-\frac{294}{450}$	$-\frac{99}{450}$	12.65
15	16	14	16	15.12	$-\frac{394}{450}$	$-\frac{100}{450}$	16.88
19	20.25	17.75	20	18.90	$-1\frac{45}{450}$	$-\frac{101}{450}$	21.10
23	24.5	21.5	24	22.67	$-1\frac{147}{450}$	$-\frac{102}{450}$	25.33
27	28.75	25.25	28	26.44	$-1\frac{250}{450}$	$-\frac{103}{450}$	29.56
30	32	28	32	30.21	$-1\frac{354}{450}$	$-\frac{104}{450}$	33.79

大衍历 赤道度	大衍历 黄道度 分到至	大衍历 黄赤道度差	大衍历 每限增损数	大衍历 黄道度 至到分
5	5.50	$+\frac{12}{24}$	$+\frac{12}{24}$	4.50
10	10.96	$+\frac{23}{24}$	$+\frac{11}{24}$	9.04
15	16.38	$+1\frac{9}{24}$	$+\frac{10}{24}$	13.63
20	21.75	$+1\frac{18}{24}$	$+\frac{9}{24}$	18.25
25	27.08	$+2\frac{2}{24}$	$+\frac{8}{24}$	22.92
30	32.38	$+2\frac{9}{24}$	$+\frac{7}{24}$	27.62

续表

乾象历			皇极历					大衍历				
赤道度	黄道度 分到至	黄道度 至到分	赤道度	黄道度 至到分	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 分到至	赤道度	黄道度 分到至	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 至到分
34	36.25	31.75	36	33.98	$-2\frac{9}{450}$	$-\frac{105}{450}$	38.02	35	37.63	$+2\frac{15}{24}$	$+\frac{6}{24}$	32.37
38	40.5	35.5	40	37.74	$-2\frac{115}{450}$	$-\frac{106}{450}$	42.26	40	42.83	$+2\frac{20}{24}$	$+\frac{5}{24}$	37.17
42	44.75	39.25	44	41.51	$-2\frac{222}{450}$	$-\frac{107}{450}$	46.49	45	48	$+3$	$+\frac{4}{24}$	42
45	48	43	47.31	44.82	$-2\frac{222}{450}$	0	49.80	46.31	49.31	$+3$	0	43.31
50.31	53.06	47.56	51.31	49.06	$-2\frac{115}{450}$	$+\frac{107}{450}$	53.57	51.31	54.14	$+2\frac{20}{24}$	$-\frac{4}{24}$	48.48
54.31	54.81	53.81	55.31	53.29	$-2\frac{9}{450}$	$+\frac{106}{450}$	57.31	56.31	58.94	$+2\frac{15}{24}$	$-\frac{5}{24}$	53.68
58.31	60.56	56.06	59.31	57.52	$-1\frac{354}{450}$	$+\frac{105}{450}$	61.10	61.31	63.69	$+2\frac{9}{24}$	$-\frac{6}{24}$	58.93
61.31	63.31	58.31	63.31	61.76	$-1\frac{250}{450}$	$+\frac{104}{450}$	64.87					

续表

乾象历			皇极历				
赤道度	黄道度 分到至	黄道度 至到分	赤道度	黄道度 至到分	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 分到至
65.31	67.06	63.56	67.31	65.98	$-1\frac{147}{450}$	$+\frac{103}{450}$	68.64
69.31	70.81	67.81	71.31	70.21	$-1\frac{45}{450}$	$+\frac{102}{450}$	72.41
73.31	74.56	72.26	75.31	74.44	$-\frac{394}{450}$	$+\frac{101}{450}$	76.19
76.31	77.31	75.31	79.31	78.66	$-\frac{294}{450}$	$+\frac{100}{450}$	79.96
80.31	81.06	79.56	83.31	82.88	$-\frac{195}{450}$	$+\frac{99}{450}$	83.74
84.31	84.81	83.81	87.31	87.10	$-\frac{97}{450}$	$+\frac{98}{450}$	87.53
88.31	88.56	88.06	91.31	91.31	0	$+\frac{97}{450}$	91.31
91.31	91.31	0					

大衍历				
赤道度	黄道度 分到至	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 至到分
66.31	68.39	$+2\frac{2}{24}$	$-\frac{7}{24}$	64.23
71.31	73.06	$+1\frac{18}{24}$	$-\frac{8}{24}$	69.56
76.31	77.69	$+1\frac{9}{24}$	$-\frac{9}{24}$	74.93
81.31	82.27	$+\frac{23}{24}$	$-\frac{10}{24}$	80.35
86.31	86.81	$+\frac{12}{24}$	$-\frac{11}{24}$	85.81
91.31	91.31	0	$-\frac{12}{24}$	91.31

刘焯皇极历又给出新的变换法，其术文曰①：

> 准冬至所在为赤道度，后于赤道四度为限，初数九十七，每限增一，以终百七。其三度少弱，平，乃初限百（九）[七]，（亦）每限（增）[损]一，终（百一十九）[九十七]，春分所在；因（百一十九）[九十七]，每限（损）[增]一，又终百（九）[七]，亦三度少弱，平，乃初限百七，每限损一，终九十七，夏至所在；又加冬至后法得秋分、冬至所在数。各以数乘其限度，百八[十]而一，累而总之，即黄道度也。②

这实际上是以文字描述方式给出的计算表格。依此，可列如表1—18所示。这是自冬至到春分和自春分到夏至之间黄赤道度的变化情况，其中春分到夏至之间的"黄赤道度差"和"每限增损数"均与冬至到春分之间者相等，但正负号相反。而夏至到秋分、秋分到冬至之间黄赤道度的变化情况则分别与冬至到春分、春分到夏至之间者相同。由表1—18则可求得任一度值时黄赤道度的变换。

一行也给出黄赤道度变换的新方法，其术文曰：

> 黄道之差，始自春分、秋分，赤道所交前后各五度为限。初，黄道增多赤道二十四分之十二，每限损一，极九限，数终于四，率：赤道四十五度而黄道四十八度，至四立之际一度少强，依平。复从四起，初限五度，赤道增多黄

---

① 该术文有错误，（ ）为错字，[ ]为经改正者。严敦杰已对术文做了重要校改，但不尽妥，需在其基础上，再做修订如上。严敦杰：《中国古代的黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958年，第1期。

② 《隋书·律历志下》。

道二十四分之四，每限益一，极九限而止，终于十二，率：赤道四十五度而黄道四十二度，复得冬、夏至之中矣。[①]

依之，也可列出表格，如表1—18所示。其中计算夏至（或冬至）到秋分（或春分）之间的黄道度时，表列"黄赤道度差"和"每限增损数"的正负号应相反。

五代王朴钦天历[②]、北宋王处讷应天历、吴昭素乾元历和史序仪天历[③]都分别以文字描述的方式给出黄赤道度变换法，各限的划分都与大衍历相同，但各家所给的每限增损数和黄赤道差的极大值（约当赤道度为45度时）各异[④]。现将这四种历法的此二值列如表1—19。

表1—19　钦天等历黄赤道度每限损益数和极大值

历名	每限损益数	黄赤道度差极大值
钦天历	40、35、30、25、20、15、10、5、0（以72为分母）	$2\frac{1}{2}$度
应天历	12、10.5、9、7.5、6、4.5、3、1.5、0（以20.2为分母）	$2\frac{68}{101}$度
乾元历	9、8、7、6、5、4、3、2、1（以16.8为分母）	$2\frac{57}{84}$度
仪天历	107、97、87、77、67、57、47、37、27（以202为分母）	$2\frac{995}{1010}$度

依各历法的每限损益数即可列出如表1—18中大衍历黄赤道差表相类似的表格。

以上便是中国古代历法中所给黄赤道度差表的状况。在应

① 《新唐书·历志三下》。
② 《新五代史·司天考一》。
③ 《宋史·律历志一》。
④ 严敦杰：《中国古代黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958年，第1期。

用这些表格计算时,先推算所求赤道度数所入的限数和余数,再以余数为引数,依一次差内插法计算之。自东汉张衡首创其法,便奠定了此表的基本形式。刘焯则将其形式趋于完备,他应用了均匀的分限法和每限损益数递增减的方法。后者对后世历家产生很大影响,它从理论上讲要比张衡一律用1/4度为损益数来得合理。而一行改4度1限为5度1限,此法为后世历家所录用。

黄赤道度差极大值应约等于2.5度。由之可见,皇极历和钦天历所取值均为2.5度,是相当接近的;应天历和乾元历所取值为2.67度,还比较接近;而刘洪(张衡)、一行和史序则取3度或接近于3度,其误差是较大的。

自宋行古崇天历开始,及其后各历法均前承边冈崇玄历的公式算法来计算黄赤道度差,这在第二章第四节中还要论及。

二、黄白道度差和赤白道度差表

这是一种用于计算黄道宿度与白道宿度之间以及赤道宿度与白道宿度之间变换的表格。首见于刘焯皇极历,是以文字描述的方式给出的,其术文曰:

> 准交定前后所在度(181.8967)半之,亦于赤道四度为限,初十一,每限损一,以终于一。其三度(强)[弱],平。乃初限数一,每限增一,亦终十一,为交所在。即因十一,每限损一,以终于一。亦三度(强)[弱],平,又初限数一,每限增一,终于十一,复至交半。返前表里,仍因十一增损,如道得后交及半交数。各积其数[乘限度],百八十而一,即道所行每与黄道差数。①

---

① 《隋书·律历志下》。

这是关于自黄白交点(Q_1)前后 90.94335 度到另一黄白交点(Q_2),以及 Q_2 前后 90.94335 度区间黄白道宿度变换状况的描述。这里所谓黄白道宿度是指以通过赤极的赤经圈分别在黄道、白道上量取的度值,它们可分别称为"极黄经"和"极白经"。依术文意,亦可列出如同表 1—18 相类似的表格。表 1—18 中的"赤道度"应改为"黄道度"4、8、…、44、46.94、50.94、…、90.94(其中 46.94—44=2.94,为三度弱,与表 1—18 中的 47.31—44=3.31,即三度少弱不同);"每限增损数"应分别为$\frac{-11}{45}$、$\frac{-10}{45}$、…、$\frac{-1}{45}$、0、$\frac{1}{45}$、$\frac{2}{45}$、…、$\frac{11}{45}$;"黄道度"和"黄赤道度差"应改为"白道度"和"黄白道度差",其计算方法则相类似。如当"黄道度"为 44 度时,"黄白道度差"等于$-\frac{66}{45}$(=—1.47 度,此即黄白道度差的极大值),"白道度"应等于 $44-\frac{66}{45}=42\frac{24}{45}$度。

一行大衍历也以文字描述方式给出黄白道度差,而且还给出了赤白道度差的换算表,其术文曰:

> 各视月交所入七十二候,距交初黄道日每五度为限。亦初数十二,每限减一,数终于四,乃一度(强)[弱],依平。更从四起,每限增一,终于十二,而至半交,其去黄道六度。又自十二,每限减一,数终于四,亦一度(强)[弱],依平。更从四起,每限增一,终于十二,复与日轨相会。各累计其数,以乘限度(5),二百四十而一,得度。不满者,二十四除,为分。为月行与黄道差数。距半交前后各九限,以差数为减,距正交前后各九限,以差数为加。计去冬至、夏至以来候数,乘黄道所差,十

八而一，为月行与赤道差数。①

依此亦可列出与表1－18相类似的表格，只是表1－18中的“赤道度”、“黄道度（分到至）”、“黄赤道度差”和“黄道度（至到分）”需分别改作“黄道度”、“白道度（正交至半交）”、“黄白道度差”和“白道度（半交至正交）”。其“黄道度”值分别为5、10、…、45、45.94（0.94即为一度弱）、50.94、…、90.94。其“每限增损数”值则分别为$+\frac{12}{48}$、$+\frac{11}{48}$、…、$+\frac{4}{48}$、0、$-\frac{4}{48}$、$-\frac{5}{48}$、…、$-\frac{12}{48}$。于是，“黄白道度差”、“白道度（正交至半交）”、“白道度（半交至正交）”各值均可依与表1－18相类似的方法计算。如当“黄道度”等于45度时，其“黄白道度差”为＋1.5度（此即黄白道度差的极大值），“白道度（正交至半度）”和“白道度（半交至正交）分别等于46.5度和43.5度。

也依上术文，赤白道度差应等于由上述方法求得的黄白道度差乘以所求时日距冬至（或夏至）的72候的候数（在0～36之间），再除以18。

王朴钦天历也载有黄白道度差和赤白道度差的变换法，其法与大衍历黄白道度差基本相同，其稍异者是它将黄道分为8节（二至、二分和四立），每一节均分为9限，即1限约为5.07日（计算黄白道度差时，是以5日为1限，在四立前后有1度少强作所谓“依平”处理）。这样也可依类似于表1－18所示的方法列出相应表格。在此基础上，钦天历又有术文曰：

各置所入限度，[遇半倍使]，以限率（5.07）乘之，为泛差。其正交、中交前后各九限，以距二至之宿限数

① 《旧唐书·历志三》，《新唐书·历志四上》。

乘之；半交前后各九限，以距二分之宿限数乘之，皆[十八约之]，如经法(72)而一，为黄道差。……四约泛差，以黄道差减之，为赤道差。①

这里“正交”、“中交”指黄白道的两个交点，“半交”指距黄白交点前后约90.94度处。正交、中交点距冬至(或夏至)的限数在0～18之间，半交点距春分(或秋分)的限数亦如之。考虑到钦天前后有关历法(如大衍历和下面将要论及的应天历)黄赤道差为黄白道差的2倍的事实，上引术文中应加“遇半倍使”(应天历用语，取其一半的意思)；又虑及钦天历上术文中有以限数(0～18)乘“泛差”的步骤，当“正交”或“中交”正好在春分(或秋分)点时，限数正等于18，此时黄白道度值应正好等于“泛差”/72，所以在限数乘以“泛差”后，还应以18除之。于是术文中“如经法而一”之前，当补“十八约之”四字。依此，钦天历求黄白道度差的算法应为：$\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{2}\times\frac{\text{限数}}{18\times 72}$(所入限度可由上述表求得)。而：

$$\text{赤白道度差}=\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{8}-\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{2}\times\frac{\text{限数}}{18\times 72}$$

$$=\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{8}\times\left(1-\frac{\text{限数}}{18\times 18}\right)$$

王处讷应天历的黄白道度差和赤白道度差变换法，介乎大衍历和钦天历之间，它采用大衍历的分限法和应用72候数之法入算(各限的初数与每限损益数又均与应天历的黄赤道度差的计算相同)，又采用了钦天历求黄白道度差法的后半部分。其术文曰：

① 《新五代史·司天考一》。

> 交初、交中、半交，各以[所入]限数，遇半倍使，乘限度(5)为泛差。其[交初]、交中前后各九限，以距二至之宿前后候数乘之；半交前后各九限，各至二分之宿前后候数乘之，皆[十八约之]，满百[一]而一，为黄道差。……倍泛差，退一位，又以黄道差减，为赤道差。①

这里“交初”、“交中”即钦天历的“正交”与“中交”。依术文意，其黄白道度差应等于可由上表求得的“所入限数”(相当于钦天历的“所入限度”)乘以$\frac{5\times\text{“候数”}}{2\times18\times101}$(除以18的理由同上，又由表1—19知，应天历的度母应为101)。而：

$$\text{赤白道度差}=\frac{\text{“所入限度”}\times5\times2}{2\times10}$$
$$-\frac{5\times\text{“候数”}\times\text{“所入限数”}}{2\times18\times101}$$
$$=\text{“所入限数”}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{5\times\text{“候数”}}{2\times18\times101}\right)$$

此后各历法黄白道度差和赤白道度差均以公式法计算之。在第二章第四节中，我们还将做进一步的介绍。

第九节　五星运动不均匀性改正表

一、五星入气加减表

在北齐张子信发现五星运动不均匀性之后，刘焯在其皇极历中便引进了用于推算五星运动不均匀影响的有关表格，这是以文字方式描述的，可称之为五星入气加减表。张胄玄大业历、傅仁

① 《宋史·律历志二》。

均戊寅历、李淳风麟德历和徐承嗣正元历亦给出此类五星入气加减表，是为中国古代五星运动不均匀性改正表的早期形式。现分别讨论如次。

(一)木星

皇极历术曰：

> 平见，在春分前，以四乘去立春日；小满前，又三乘去春分日，增春分所乘者；[白露前，以四乘去小暑日][1]，白露后，亦四乘去寒露日；小暑，加七日；小雪前，以八乘去寒露日；冬至后，以八乘去立春日，为减，小雪至冬至减七日。[2]

这是五星入气加减法的典型描述方式。说的是由于木星运动不均匀性的影响，使木星晨见东方的真实时间(常见)较平见日(由木星平均会合周期计算而得的晨见东方的时间)或超前或滞后，超前或滞后的时间改正值则因节气的不同而各异。如对于立春到春分这一时段中某一日的改正值，需依一次差内插法计算，即以该日与立春日的时距乘以 4，再除以转法 52，即得。别的时段的改正值计算均仿此。当然，术文中直书“加七日”或“减七日”的时段的改正值则无需做这样的计算。

若以改正日及分为纵坐标，以二十四节气为横坐标，按上术文意，可以给出皇极历木星运动不均匀性改正的曲线图(图 1—1)。

---

① 综观术文，对于小暑到白露间的变化状况未述及，当为脱漏，特据历理补之。

② 《隋书·律历志下》。
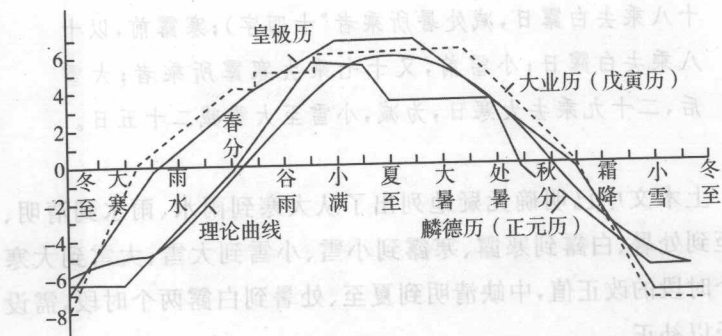
图 1—1 皇极等历木星运动不均匀性改正曲线图

大业、戊寅、麟德和正元四历的木星入气加减法[①]，与皇极历大同小异，依之，亦可绘出相应的改正曲线，如图 1—1 所示。这里需要指出的是：在计算各时段的改正值时，这四种历法采用的除数（与皇极历的转法相当者）分别为 42640、676、670 和 1095。大业、戊寅二历改正曲线的差异仅仅在于：大业历取“十寒后十日”，而戊寅历取其后五日余的“立春”作为关节点。在图 1—1 中，我们是以大业历为准给出改正曲线的。正元历的改正曲线则与麟德历全同。

（二）火星

皇极历术曰：

平见，雨水前，以十九乘去大寒日；清明前，又十八乘去雨水日，增雨水所乘者；（此间应加“清明至夏至加二十七日”句）；夏至后，以十六乘去处暑日；小满（应为处暑）后，又十五日（‘十五日’三字为衍文，需改增‘二

① 《隋书·律历志中》，《新唐书·历志》一、二和五。

十八乘去白露日，减处暑所乘者'十四字)；寒露前，以十八乘去白露日；小雪前，又十七乘去寒露所乘者；大雪后，二十九乘去大寒日，为减，小雪至大雪减二十五日。

上术文中已明确无疑地列出了从大寒到雨水、雨水到清明、夏至到处暑、白露到寒露、寒露到小雪、小雪到大雪、大雪到大寒七个时段的改正值，中缺清明到夏至、处暑到白露两个时段，需设法予以补正。

已知大寒经雨水到清明，改正值累增 $2\times15.21875\times\frac{19}{52}+3\times15.21875\times\frac{18}{52}=26.9255\approx27$(日)

清明到夏至的改正值应持平，均等于 27 日，故需在术文"夏至后"句前增加一句，即"清明至夏至加二十七日"。又，已知从夏至到处暑，改正值累减 $4\times15.21875\times\frac{16}{52}=18.7308$ 日，从处暑到白露，改正值应累减 $26.9255-18.7308=8.1947$ 日，于是该时段改正值的每日变率应等于 $8.1947\times52/15.21875=28$。依此，我们对上述术文做了"二十八乘去白露日，减处暑所乘者"14 字之补正。

据如上做了补正后的术文，我们可以给出皇极历火星运动不均匀性改正的曲线图。大业历、戊寅历、麟德历和正元历的火星改正曲线亦可据有关术文作出(图 1－2)，戊寅历基本上与大业历一致，而正元历则与麟德历大体相同。

(三)土星

皇极历术曰：

平见，在大暑前，以七乘去小满日；寒露后，九乘去

小雪日，为加，大暑至寒露加八日。小寒前，以九乘去小雪日；雨水后，以四乘去小满日；立春后，又三乘去雨水日，增雨水所乘者，为减，小寒至立春减八日。
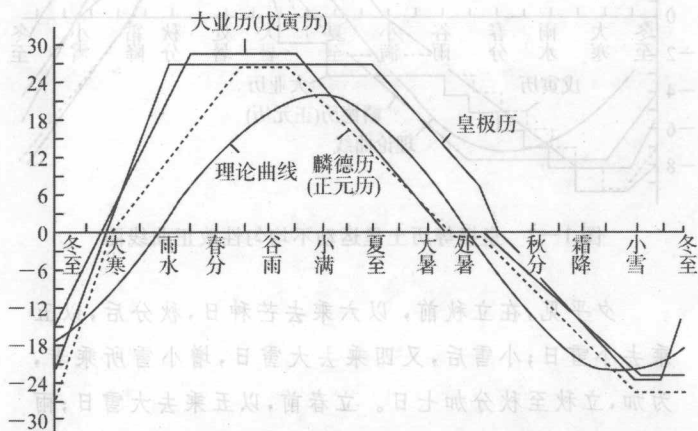
图 1－2　皇极等历火星运动不均匀性改正曲线图

依之，可得皇极历土星运动不均匀性改正曲线（图 1－3）。同理，依大业、戊寅、麟德和正元四历的有关术文可得相应的改正曲线，亦见图 1－3。此中，正元历与麟德历全同。戊寅历土星入气加减法的术文有小误，需略做修正："入大暑，日增所加百八十一分。入处暑，均加九日，入白露初日，加六千二分。"这里"均加九日"与"加六千二分"显然是一个意思，而 6002/676＝8.88 日，则 9 日仅是 8.88 日的约值。依 6002 分计，从大暑到处暑二节气（30.4375 日）间改正值的变率应为 6002/30.4375≈197，故术文中，"百八十一分"应为"百九十七分"之误。

（四）金星

皇极历术曰：
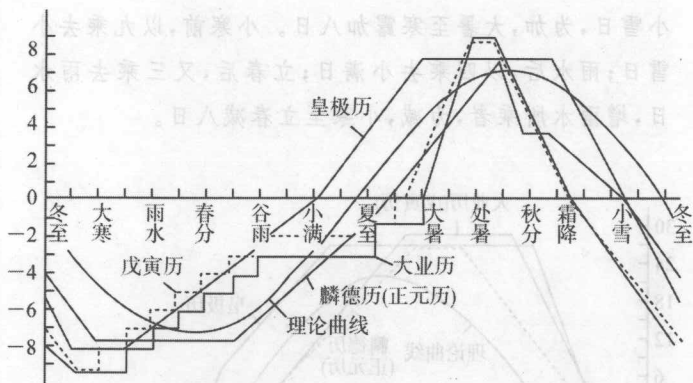
图1—3　皇极等历土星运动不均匀性改正曲线图

夕平见，在立秋前，以六乘去芒种日，秋分后，以五乘去小雪日；小雪后，又四乘去大雪日，增小雪所乘者，为加，立秋至秋分加七日。立春前，以五乘去大雪日；雨水前，又四乘去立春日，增立春所乘者，清明后，以六乘去芒种日，为减，雨水至清明减七日。晨平见，在小寒前，以六(应为五)乘去冬至日；立春前，又五(应为六)乘去小寒日，增小寒所乘者；芒种前(应为后)，以六(应为五)乘去夏至日；立夏前(应为后)，又五(应为六)乘去芒种日，增芒种所乘者，为加，立春至立夏加五日。小暑前，以六(应为五)乘去夏至日；立秋前，又五(应为六)乘去小暑日，增小暑所乘者；大雪后，以六(应为五)乘去冬至日，立冬后，又五(应为六)乘去大雪日，增大雪所乘者，为减，立秋至立冬减五日。

在"晨平见"术文中，"立夏前"与"芒种前"的两个"前"字均应为"后"之误，这是显而易见的。又，既然"立春至立夏加五日"和"立秋至立冬减五日"，但是，自冬至经小寒到立春，自立夏经芒种

到夏至，自夏至经小暑到立秋，以及自立冬经大雪到冬至改正值的增减是均为 $15.21875\times\frac{6}{52}+2\times15.21875\times\frac{5}{52}=4.68$ 日，两相矛盾。若将各段的日增减分互换，则有：$15.21875\times\frac{5}{52}+2\times15.21875\times\frac{6}{52}=4.98\approx5$ 日，于是两相吻合，故应据改。依之，可给出皇极历金星运动不均匀性改正曲线（图 1—4）。
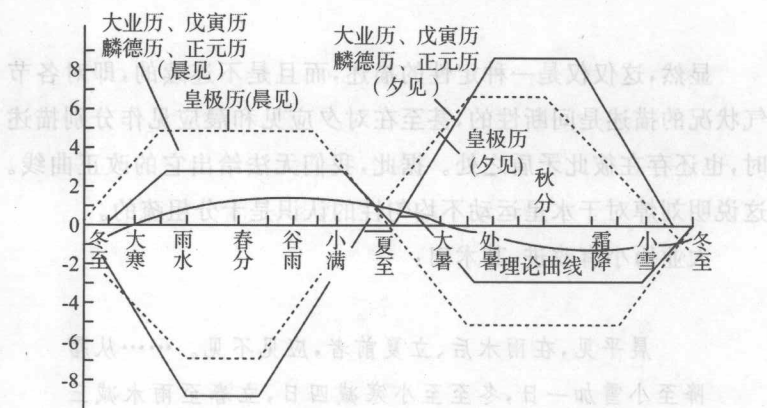
图 1—4　皇极等历金星运动不均匀性改正曲线图

在大业历金星入气加减法术文中，“夕平见，在启蛰前，以六千二百九十乘去小雪日数”句，“小雪”应改为“冬至”，因为通观整个术文，改正曲线具有明显的对称性，与之相应的时段为清明至芒种、夏至至处暑、寒露至大雪，均相距四个节气，而启蛰至小雪却为六个节气，启蛰无误，与之相距四个节气者应是冬至，故据改。戊寅、麟德和正元三历法的金星入气加减法均与大业历相同。依之，亦可作改正曲线如图 1—4。

(五)水星

皇极历术曰：

> 夕应见，在立秋后、小雪前者不见；其白露前、立夏后，时有见者。晨应见，在立春后、小满前者不见；其惊蛰前、立冬后，时有见者。

显然，这仅仅是一种定性的描述，而且是不连续的，即对各节气状况的描述是间断性的，甚至在对夕应见和晨应见作分别描述时，也还存在彼此矛盾之处。据此，我们无法给出它的改正曲线。这说明刘焯对于水星运动不均匀性的认识是十分粗疏的。

大业历小有改进，其术曰：

> 晨平见，在雨水后、立夏前者，应见不见。……从霜降至小雪加一日，冬至至小寒减四日，立春至雨水减三日。冬至前，一去三，二去二，三去一。
>
> 夕平见，在处暑后、霜降前者，应见不见。……从谷雨至夏至，减二日。

这是一种半定性半定量的描述，而且仍是不连续的，我们还难于据之作出相应的改正曲线来。但是它在分别描述晨见、夕见的改正值时，已经消除了自身的内在矛盾，更重要的是，它真切地反映了人们对水星运动不均匀性改正进行定量化描述的初始尝试。

到戊寅历，对于水星运动不均匀性改正的描述，依然是半定量半定性的，只是描述的连续性有所提高，但就总体的水平看，并

无实质性的进展。而麟德历和正元历则基本上沿袭了戊寅历的水星入气加减法。这些都为我们留下了从定性向定量描述过渡的历史轨迹。

二、五星盈缩历

自一行大衍历开始，出现了五星运动不均匀性改正的新型表格，这不但是在形式上的一种改进，更重要的是在内涵上的重大变革。刘焯等人的五星入气加减法是用于五星晨见时刻的改正，而新型表格则用于五星任一时刻的改正，即将五星运动不均匀性的改正推广到各种不同的时段。对于这种新型表格，大衍历称之为“五星爻象历”，徐昂宣明历称之为“五星平见加减历”，宋行古崇天历以后各历法均称之为“五星盈缩历”。其名称虽不同，实质却无异。下面为叙述方便，统称之为盈缩历。

各历法对盈缩历横行的总称各异，有“爻目”(大衍历和五纪历)、“变数”(宣明历)、“画数”(崇玄历)、“限数”(仪天历)、“会数”(崇天历)、“策数”(观天、纪元、统元、乾道、淳熙、会元、统天、开禧、成天、重修大明、庚午等 11 历)；但它们都把横向分为 24 栏，这一点是相同的，不过，其名称又各异：大衍历和五纪历称：少阳初、少阳二、……、少阳五、少阳上、少阴初、少阴二、……、少阴五、少阴上。宣明历称：阳初、阳二、……、阳十二、阴初、阴二、……、阴十二。崇玄历称：初、二、……、十二。应天历称：初、二、……、十一、末。乾元历称：前限初、一、……、五、末限初、一、……、五、后限初、一、……、七、末限初、一、二、三。仪天历称：一、……、十一、末。崇天、观天、统元、乾道、淳熙、会元、统天、开禧、成天 9 历称：初、一、……、十一。纪元、重修大明和庚午 3 历称：一、二、……、十二。

各历法盈缩历相邻两横向栏的度距分别为：

大衍历和五纪历：$“爻象”=\dfrac{“策实”+“变差”}{24\times“通法”}$度。

宣明历："变策"$=\frac{\text{“章岁”}+\frac{\text{“变差”}}{\text{“秒母”}}}{24\times\text{“统法”}}$度。

崇玄历：把周天度分为"盈限"和"缩限"两段（其中土、水二星两段略等），每段又各等分成 12 栏。于是，前段度距"盈画"＝$\frac{\text{“盈限”}}{12}$度，后段度距"缩画"＝$\frac{\text{“缩限”}}{12}$度。应天、乾元、仪天 3 历的划分法同崇玄历，只是名称各异。应天称"阳限"和"阴限"，乾元称"前限"和"后限"，仪天称"上限"和"下限"。

纪元历："历策"$=\frac{\text{“历率”}}{24\times\text{“日法”}}$度。

重修大明历和庚午历："历策"$=\frac{\text{“历率”}}{24\times\text{“历度法”}}$度。

其他各历法："历策"（或称"会策"）$=\frac{\text{“周天度”}}{24}$度。

设第 n 栏与第 1 栏的度距为 S_n，对于崇玄历，其前段 $S_n=n\times$"盈画"，后段 $S_n=$"盈限"$+n\times$"缩画"，$n=0$、1、2、…、11，应天、乾元、仪天 3 历与之类同。对于其他各历法，$S_n=n\times$"爻象"（或"变策"、"历策"、"会策"），$n=0$、1、2、…、23，其 S_n 即等于或约等于$n\times15°$。

大多数盈缩历的纵向只设两栏：一曰"损益"（或"损益率"）；一曰"进退"（大衍历）或"进退积"（五纪历）或"盈、缩差积"（崇玄历）或"阳、阴积"（应天历）或"差度"（乾元历）或"增、减定度"（仪天历）或"盈、缩积度"（崇天历及其后各历法均同此）。宣明历只设前一栏，名曰"加减"。应天历增"阳变分"和"阴变分"二栏；仪天历增"上限度分"和"下限度分"二栏。其算法均类同于崇玄历的 S_n，此时 $n=1$、2、…、12。乾元历增"差分"栏而无"损益"栏。大多数历法盈缩历纵向前后二栏的关系很明确，即后栏是为前栏的累积值。唯应天历的"损益率"和乾元历的"差分"二项的算法不明，待考。

依上述关系和某些盈缩历的“损益率”、“进退积”存在的对称性，可对历代盈缩历进行订正，发现其讹误、脱漏或为衍文者凡220余处。[①]

各历法均有计算五星“平合入历”——平合与盈缩历第一栏间度距(S)的算法。已知S，平合入盈缩历的哪两栏之间可知，再用内插法可求得相应的进退定数，以之进加退减平合日算，为常合日算，即“常合日”=“平合日”±“进退定数”。这里“进退定数”就是当度距为S时的Δ_t值。那么，盈缩历所列的“进退积”，即为与第1栏的度距为S_n时的Δ_t值，而“损益率”则是相邻两栏间的Δ_t值之差，亦即每经一栏五星实行度与平行度之差。

遍察100个盈缩历第1栏的Δ_t值，除宣明历土星不等于零外，其余全为零(应天历木、火二星稍稍大于零，可姑且视为零)。又，“损益率”正最大值之所在，有3/4强的盈缩历均在第1栏前与后，说明这些盈缩历的第1栏即为五星近日点。另有1/4弱盈缩历第1栏前后的“损益率”稍小于正最大值，其正最大值之所在，除崇玄等3历土星在第4栏前后，偏离稍大外，其他均在第2、23、24栏前后，只是小有偏离。我们认为，这种偏离是由于Δ_t的观测误差造成的，而它们既以第1栏的Δ_t为零为起算点，那么，第1栏当是盈缩历制定者所认定的五星近日点。唯有宣明历有些例外，其木星“损益率”正最大值在第13栏前后，则第1栏应为远日点；其土星，第1栏Δ_t远远大于零，而Δ_t值为零和“损益率”正最大值均在第9栏前后，所以其近日点当在第9栏。

我们以为，盈缩历的Δ_t值是由实测得到的。经长期观测，首先可以确定五星运行速度最快的一点——近日点，由此起算，分别测得S_n时五星的实行度，减去相应的平行度S_n，即得各Δ_t值。

① 陈美东:《古历新探》，辽宁教育出版社，1995年，第448～455页。

该值实际上就是五星循各自的椭圆形轨道运行的实际度值与沿圆形轨道运行的相应平均度值之差。

考察100个盈缩历的 Δ_t 值，大致有四种情况：(Ⅰ)前后两段的 $|\Delta_t|$ 值两两对称，且前后两段自身的 Δ_t 值亦两相对称，约占全部盈缩历的1/2弱；(Ⅱ)前后两段两两对称，但前后两段自身不对称，约占1/8；(Ⅲ)前后两段不对称，而前后两段自身对称，约占1/4强；(Ⅳ)无对称关系可言者，约占1/8。从历法年代先后看，大衍历、五纪历五星均取(Ⅰ)式。自宣明历起就有所变化，火、土二星取(Ⅳ)式，木、金、水三星取(Ⅰ)式。而崇玄等四历，对木、火、金三星采用了前后段不均分的方法，这本身就含有不对称性的意义，对土星则取(Ⅲ)式或(Ⅳ)式，水星取(Ⅰ)式或(Ⅱ)式。所以，除水星外，崇玄等四历都采取了前后段不对称式。崇天历，对于木、土、火三星取(Ⅳ)式，金、水二星取(Ⅰ)式。其后各历法总的趋势是：对于土星和木星的大部分取(Ⅲ)式或(Ⅳ)式，对于水星和金、火二星的大部分取(Ⅰ)式或(Ⅱ)式。这些情况表明，至少从宣明历始，历法家已经较普遍地发觉盈缩历 Δ_t 值不对称性的问题，对木、土二星的认识则更充分些。这是人们对五星(特别是木、土二星)的 Δ_t 值进行了长期实测的有力证明。

历代盈缩历之间有不少存在前后继承的关系，它们可分为若干个系统。大衍历和五纪历的五星构成一个系统。宣明历的五星独树一帜。崇玄、应天、乾元和仪天四历组成一个系统，其中仅应天历土星和仪天历金星有较大差异。崇天历五星自成一系，此中金、水二星对后世历法影响巨大，除会元历金星后段有相当大变动外，其余都是以崇天历为范本，略加修订而已。对于火、木、土三星，观天历和纪元历各自成一系。其后，火星，纪元历的影响颇大，除统元历前段同崇天历，后段同观天历外，其他各历法或全同纪元历，或仅稍作修正。木星，统元历和淳熙历各自成一体；乾

道历前段依纪元历，后段依崇玄历；其他各历法可分为两支：一支继纪元历，有重修大明、庚午和授时三历；一支继淳熙历，有会元、统天、天禧、成天四历。土星，统元、乾道、会元三历各自成体；淳熙历前段同乾道历，后段同纪元历；成天历前段同纪元历，后段作了较大修正，其他各历均依纪元历略作修正。

总之，大衍、崇玄、崇天和纪元四历五星盈缩历的影响最大，另外具有较大独立性的有宣明、观天、统元三历，淳熙历的木星及乾道、会元两历的土星盈缩历，它们对有关的Δ_t值均进行了较认真的测量，并得到新的数据。

对于中国古代五星运动不均匀性改正表的精确度，可以用历测五星偏心率值与相应的理论值的差异（Δ_{2e}）和历测五星实行度与平行度之差（对于皇极历五种历法而言，即指与入气加减日数相应的度值；对于盈缩历而言，即指"进退积"等）与相应的理论值的差异（$\Delta_{木}$、$\Delta_{土}$）来衡量。其状况可分述如下[①]：

水星：皇极历等五种历法对水星运动不均匀性改正的描述还处于半定性、半定量的状况。大衍历以后则有所进步。大衍历、五纪历同，其历测 $2e$ 值过小，Δ_{2e}达20°余。宣明历有所改善，但历测 $2e$ 值还是太小。崇玄等四历的历测 $2e$ 值反不及大衍历，对后世历法影响巨大的崇天历又不及崇玄历。由此看来，各历法水星盈缩历对于水星运动不均匀性的改正，只是小有补益。

金星：皇极等五种历法对于金星运动不均匀性改正的描述，分为晨见和夕见两条截然不同的改正曲线（见图1—4），这显然是对金星运动不均匀性的极大误解，因为无论晨见还是夕见，金星运动不均匀性改正曲线当是一致的。这种状况表明，它们对于金星运动不

---

① 陈美东：《中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法》，《自然科学史研究》，1990年，第3期；陈美东：《五星盈缩历之研究》，见杜石然，主编：《第3届国际中国科学史讨论会论文集》，科学出版社，1990年。

均匀性的认识是似是而非的。大衍历、五纪历同,历测 $2e$ 值偏大,Δ_{2e}为 26′,它对于金星运动不均匀的改正还是有益的。而自宣明历始,历测 $2e$ 值骤增,为理论值的10倍多,崇玄等四历亦大增其值,为理论值的7倍余,崇天历虽大减其值,但仍为理论值的2倍多,其后各历法又因循不改。这说明从宣明历以后各历法的盈缩历,对金星运动不均匀性所作的改正,都起了不好的作用。

火星:皇极历等五种历法的 Δ_{2e}在 1°.5～1°.9 间。皇极、大业和戊寅三历的 $\Delta_{火}$ 均为 3°.1;麟德和正元两历略有进步,$\Delta_{火}$ 为 2°.6。而大衍历和五纪历的盈缩历 Δ_{2e}则增至 4°余。自宣明历开始,及至授时历的盈缩历 Δ_{2e}更达到 14°～16°间。依此所做的改正,起了适得其反的作用。这就是说后世盈缩历对火星运动不均匀性的描述的准确度远较隋唐之际诸历为差,造成这种状况的原因还有待进一步的探讨。

木星:皇极、大业和戊寅三历的 Δ_{2e} 均为 1°.0,而麟德历和正元历的 Δ_{2e}降至 0°.1,达到相当高的水平。皇极历 $\Delta_{木}$ 为 1°.6,大业历和戊寅历 $\Delta_{木}$ 为 1°.9,而麟德历和正元历 $\Delta_{木}$ 降至 0°.8。这些都表明麟德历关于木星运动不均匀性的描述要较前有较大进步,它甚至较大衍历和五纪历($\Delta_{木}$ 为 1°.2)的精度还要高些。宣明历 $\Delta_{木}$ 为 0°.6,才超过麟德历的水平。但崇玄、应天、乾元和仪天四历却又大为倒退,$\Delta_{木}$ 反增至 1°.3,崇天历较之虽有改善,但也只与大衍历持平。自观天历开始才大为进步,纪元、重修大明、庚午和授时四历继其余绪,$\Delta_{木}$ 降至 0°.4～0°.5 之间,是为最佳状况。但自观天历后,统元、乾道、淳熙等历法的 $\Delta_{木}$ 则在 0°.7～0°.9之间徘徊,开禧历 $\Delta_{木}$ 则更增至 1°.2,处于变动不定的状态。

土星:皇极历和麟德历 Δ_{2e}同为 0°.7,但其 $\Delta_{土}$ 分别为 2°.4 和 1°.9,表明麟德历略优于皇极历。而大业历和戊寅历的 Δ_{2e}和 $\Delta_{土}$ 均分别为 1°.7 和 3°.0 左右,是精度较差者。大衍历 $\Delta_{土}$ 约为1°.0

(五纪历同)，较前大有进步。而崇玄、乾元、仪天和崇天四历的$\Delta_{\pm}$却小增，为1°.1～1°.2之间。从纪元历开始又大有改进，$\Delta_{\pm}$降至0°.5～0°.7之间，是为最佳状况。唯成天历$\Delta_{\pm}$为1°.5，这主要是由于土星近日点黄经测量的误差较大造成的。

第十节　交食计算用表

一、推日应食不食和日不应食而食表

刘焯皇极历最先给出日应食不食和日不应食而食表，它是以文字描述的方式给出的。所谓应食或不应食是指依据食限推算而得的结论，但由于日食发生的节气不同、与午正相距时刻各异，并在某特定的日月与黄白交点距度的条件下，应食者可能不食，不应食者可能食，即因月亮视差的影响导致了这种状况的出现。其术曰：

推应食不食术：朔先后在夏至十日内，去交十二辰少；二十日内，十二辰半；一月内，十二辰大[太]；闰四月、六月，十三辰以上，加南方三辰。若朔在夏至二十日内，去交十三辰，以加辰、申半以南四辰；闰四月、六月，亦加四辰。谷雨后，处暑前，加三辰；清明后、白露前，加巳半以西、未半以东二辰；春分、[秋分]前[后][1]，加午一辰，皆去交十三辰半以上者，并或不食。[2]

① 由全术文知，若仅言“春分前”，则对于清明到春分及其前，白露到秋分及其后的时段均未顾及，故应据补。

② 《隋书·律历志下》。

这是指定朔时月亮在黄道北的情况而言的。由是，术文中九种应食不食的判别条件，可列于表1—20中（序号1～9）。

我们可以对表1—20中序号1～9的情况进行分析，对于月在内道而言，当Z增大时，日食较易发生，若日月同黄白交点的度距(A)值相应增大，可能发生应食不食的情况：设距午正时刻相同，离夏至渐远时，Z当渐大，A需相应渐增，则可能不发生日食，1、2、4、5、7均合此，设离夏至远近相同，距午正时刻渐增时，乙亦当渐大，A亦需相应渐增，或可不食，2和3、5和6均与之相合；设A不变，当因距午正时刻渐小和距夏至渐远所导致的Z大小变化大体抵消时，或可不食，6、7、8、9与之符合。

又术文曰：

> 推不应食而食术：朔在夏至前后一月内，去交二辰；四十六日内，一辰半，以加二辰。又一月内，亦一辰半，加三辰。（及加四）[去交一]辰①，与四十六日内，加三辰。谷雨后、处暑前，加巳少后，未太前；清明后、白露前，加二辰；春分（后）、秋分前[后]②，加一辰，皆去交半辰以下者，并得食。③

这是指定朔时月亮在黄道南的情况而言的。于是术文中七种不应食的判别条件亦可列于表1—20中（序号10～16）。

表1—20中序号1的含义是：当日月相会在夏至前后10日之内，及距午正8.3～12.5刻之间，以及日月与黄白交点的度距大于或等于13°.45时，将不会发生日食。其余各序号的含义均与之相似。

---

① “与四十六日内”后已言“加三辰”，其前又言“加四辰”，显然有误，虑及其术文前后已有去交二辰、一辰半和半辰之说，故应将“及加四”改作“去交一”。

② 理同“推应食不食术”。

③ 《隋书·律历志下》。

表 1—20　应食不食和不应食而食的判别条件

序号	A	节气	加辰（距午正前后刻）	序号	A	节气	加辰（距午正前后刻）
1	12.25 辰（13°.45）	夏至十日内	加三辰（8.3～12.5）	9	13 辰半以上（14°.82 以上）	春分、秋分前后	加一辰（0～4.2）
2	12.5 辰（13°.73）	夏至二十日内	同上	10	2 辰（2°.20）	夏至一月内	加二辰（4.2～8.3）
3	13 辰（14°.27）	同上	加四辰（12.5～16.7）	11	1.5 辰（1°.65）	同上	加三辰（8.3～12.5）
4	12.75 辰（14°.00）	夏至一月内	加三辰（8.3～12.5）	12	同上	夏至 46 日内	加二辰（4.2～8.3）
5	13 辰以上（14°.27 以上）	闰四月、六月	同上	13	1 辰（1°.10）	同上	加三辰（8.3～12.5）
6	13 辰半以上（14°.82 以上）	同上	加四辰（12.5～16.7）	14	0.5 辰以下（0°.55 以下）	谷雨后、处暑前	加巳少后、未太前（8.3～10.4）
7	同上	谷雨后、处暑前	加三辰（8.3～12.5）	15	同上	清明后、白露前	加二辰（4.2～8.3）
8	同上	清明后、白露前	加二辰（4.3～8.3）	16	同上	春分、秋分前后	加一辰（0～4.2）

同理，对于月在外道时，当 Z 增大时，日食较难发生，若 A 相应减小，则可能发生不应食而食的情况：设距午正时刻相同，离夏至渐远，Z 当渐大，A 需相应渐减，可得食，表 1－20 中 10、12、15 均合此；设离夏至远近相同，距午正时刻渐增，Z 亦当渐大，A 亦需相应减小，可得食，10 和 11，12 和 13 均与之相合；设 A 不变，当因距午正时刻渐小和距夏至渐远所导致的 Z 大小变化大体抵消时，可得食，14、15、16 正与之吻合。

由以上分析知，表 1－20 中的 1～9 和 10～16，是两组各能自恰的条件系统，它们都定性地与月亮视差对日食影响的原理相符合。可见刘焯对这一天文学概念十分明晰，并成功地应用于应食不食和不应食而食术中。

张胄玄大业历也载有与之相类似的方法，分别称为“求内道日不食法”和“求外道日食法”[①]，也以不同的节气和距午时刻以及去交度大小三种因素为据，列出日应食不食或不应食而食的表格。但它与刘焯皇极历的相应表格相比显得简单和粗略一些。唐代傅仁均戊寅历亦列此法，分别称“推内道日不食术”和“推外道日食术”[②]，其法与大业历大同小异。

李淳风麟德历给出了较前远为详细的日应食不食或不应食而食的方法，其术曰：

> 月在内道，朔应食。若在夏至初日，以千三百七十三为初准。去交如初准已上，加时在午正前后十八刻内者，或不食。夏至前后每日益初准一分半，皆毕于九十(四)[一]日，为每日变准。以初准减变准，余十而一，为刻准。以减午正前后十八

① 《隋书·律历志中》。

② 《旧唐书·历志一》。

刻，余为时准。其去交在变准已上，加时在[时]准内，或不食。[①]

显然，这里仅论及从春分到夏至、从夏至到秋分时的情况，而未涉及从秋分到冬至到春分时段的状况，这是现传本术文缺漏所致。夏至到二分均91日余，故术文中云"皆毕于九十四日"，明显有误，严格地说应为91.31日（下同）。术文中日月去黄白交点的度距1373等，是指分值而言，需除以1340，乘以月亮每日平行度(13.36875)，再乘以0°.9856，化作360°制的度值。设距夏至n日，"距午正刻"应等于$\left(18-\frac{1.5n}{10}\right)$刻。现依略作更正的术文，可作表1—21。

又术曰：

> 月在外道，朔不应食。夏至初日，以二百四十八为初准。去交前后分如初准已下、加时在午正前后七刻内者，食。朔去夏至前后每一日损初准二分，皆毕于九十(四)[一]日，为每日变准。交分如变准已下加时如前者，亦食。又以末准六十减初准及变准，余以十八约之，为刻准。以并午正前后七刻内数，为时准。加[时刻去午前后]时准内、交分如末准已下[者]，亦食。又置末准，每一(刻)[日]加十八，为差准。加时刻去午前后如刻准已(上)[下]、交分如差准已下者，亦食。自秋分至春分，去交如末准已下，加时巳、午、未者，亦食[②]。

术文中"加时准内交分，如末准已下"（现传本及标点者作如是说），"时准"为时间，"交分"为度数，两者不能相加，故必有脱漏

① 《新唐书·历志二》。
② 《新唐书·历志二》。

之文，标点亦不妥。察其后有同类术文，由是应改作“加时刻去时准内、交分如末准已下者”。又，“每一刻加十八”，1日百刻，若依此1日需加1800，亦必有误，应改“刻”为“日”。又，“如刻准已上”，依文意“上”应为“下”，查《旧唐书·历志二》确为“下”，应据改。但《旧唐书·历志二》中的术文讹漏处更多，均应依改。术文中248等也应依前述方法化作今度。夏至后n日的“距午正刻”可分别依以下两法求得：$7+\frac{248-2n-60}{18}$和$\frac{248-2n-60}{18}$。依此，亦可将麟德历日不应食而食法列如表1－21中。

由表1－21可见，对于自春分到秋分的时段，麟德历给出了逐日不同的判据。在夏至前后，日月相会时月亮的天顶距较夏至增大，此时，若日月距午正刻数较夏至减小（可使月亮天顶距减小），两者所导致的月亮视差对日食的影响是相抵消的，若去交度较夏至时增加超过某一数值，就将造成日应食不食的后果。表1－21中“日应食不食”所示即如此。在夏至前后，若日月距午正刻数相等（如同为7刻），只有当去交度减小到一定数值时，才产生日不应食而食的现象；若去交度相等（如同为0°.59），只有当日月距午正时刻减小到一定数值时，才产生日不应食而食的现象；若日月距午正时刻日渐减小，而去交度相应增加不大于某一数值，也将产生日不应食而食的现象。表1－21中“日不应食而食”所示正是这三种情况。李淳风的这些描述至少从定性上看是合乎科学道理的。但他对于秋分至春分时段的描述却过于简略。

二、日食时差改正表

由于月亮视差的影响，定朔时刻与日食食甚时刻有所不同，两者之差即为时差改正数，刘焯皇极历最先建立了这一概念，并给出了时差改正表和相应的算法，其术曰：

表 1—21　麟德历日应食不食和不应食而食表

食或不食条件 / 日期	日应食不食		日不应食而食							
	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻
夏至初日	1373 13°.50	18.00	248 2°.44	7	60 0°.59	17.44	60 0°.59	10.44		
前后 1 日	1374.5 13°.52	17.85	246 2°.42	7	60 0°.59	17.33	78 0°.77	10.33		
前后 2 日	1376 13°.53	17.70	244 2°.40	7	60 0°.59	17.22	96 0°.94	10.22		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
前后 90 日	1508 14°.83	4.50	68 0°.67	7	60 0°.59	7.44	1680 16°.52	0.44		
前后 91.31 日	1510 14°.85	4.30	65.4 0°.64	7	60 0°.59	7.30	1704 16°.76	0.30		
秋分至春分	?	?	60 0°.59	12						

置定余(I),倍日限(11),克减之。月在里,三乘朔辰(103.5)为法(310.5),除之,所得以艮、巽、坤、乾为次,命艮(艮当为衍文)算外。不满法者半法(155.25)减之,无可减者为在前,所减之残为后,前则因余,后者减法,各为其率。乃以十加去交辰,三除之,以乘率,十四而一为差。其朔所在气二分前后一气内,即为定差。近冬至,以去寒露、惊蛰;近夏至,以去清明、白露气数(K_1或K_2),倍而三除去交辰,增之。近冬至,艮、巽以加,坤、乾以减;近夏至,艮、巽以减,坤、乾以加其差为定差。乃艮、(以坤)[坤以]加,巽、(以乾)[乾以]减定余。月在外,直三除去交辰,以乘率,十四而一,亦为定差。艮、坤以减,巽、乾以加定余,皆为食余(I')。[①]

这里"定余"系指定朔时刻的分值 I(以 1242 为分母),令 $I_1=I-2\times11$,置之,若将其化为时辰数,则有$\frac{I_1}{1242}\times12=\frac{I_1}{103.5}$。如图1—5所示,当$\frac{I_1}{103.5}<3$,亦即$\frac{I_1}{3\times103.5}<1$时,为在艮限;同理,当$1<\frac{I_1}{310.5}<2$时,为在巽限;当$2<\frac{I_1}{310.5}<3$时,为在坤限;当$3<\frac{I_1}{310.5}<4$时,为在乾限。而所谓"命算外",系指分别自子、卯、午、酉之时起算。设 I_1 在 A 处,$a_1<155.25$,则"率"即等于 a_1;设 I_1 在 B 处,$a_2>155.25$,则"率"等于 $310.5-(a_2-155.25)=465.75-a_2$。

当月在内道时:

---

① 《隋书·律历志下》。
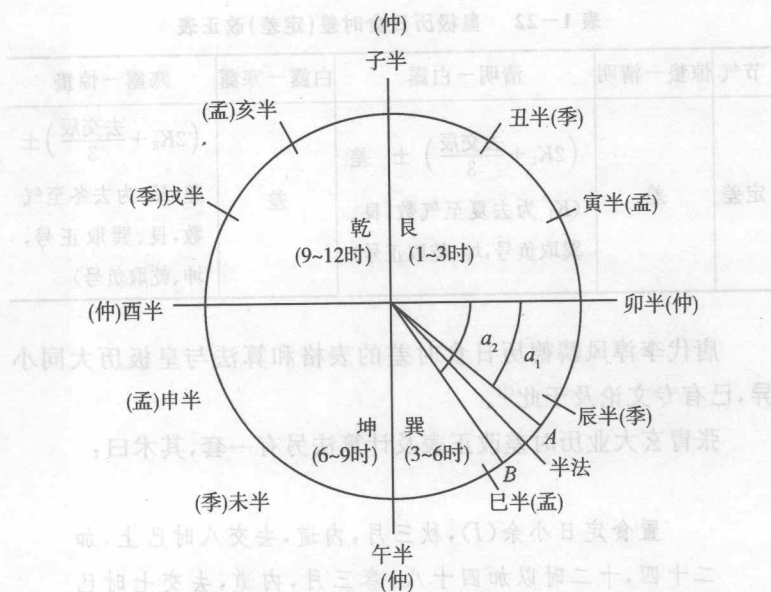
图 1－5 皇极历、大业历时差改正“前后”、正负取值示意

$$差=\frac{\frac{10+去交辰}{3}\times 率}{14}$$

月在外道时：

$$差=\frac{\frac{去交辰}{3}\times 率}{14}$$

$$食甚时刻(I')=I\pm 定差 \qquad (1-19)$$

式中，月在内道时，艮、坤取正号，巽、乾取负号；月在外道时，艮、坤取负号，巽、乾取正号。去交辰为定朔时月亮距黄白交点的度值（以时辰的形式表达者），而定差的计算可如表 1－22 所示。

表 1－22　皇极历日食时差(定差)改正表

节气	惊蛰－清明	清明－白露	白露－寒露	寒露－惊蛰
定差	差	$\left(2K_1+\frac{\text{去交辰}}{3}\right)\pm$ 差 (K_1 为去夏至气数,艮、巽取负号,坤、乾取正号)	差	$\left(2K_2+\frac{\text{去交辰}}{3}\right)\pm$ 差(K_2 为去冬至气数,艮、巽取正号,坤、乾取负号)

唐代李淳风麟德历日食时差的表格和算法与皇极历大同小异,已有专文论及于此[①]。

张胄玄大业历时差改正表及计算法另有一套,其术曰:

> 置食定日小余(I),秋三月,内道,去交八时已上,加二十四,十二时以加四十八;春三月,内道,去交七时已上,加二十四。乃以三乘之,如辰法(286)得一辰,以命子算外,即所在辰。不尽为时余。副置时余,仲辰不满半辰(143),减半辰;已上去半辰;季辰者直加半辰;孟辰者减辰法,余加半辰为差率。又,置去交时数,三已下加三,六已下加二,九已下加一,九已上依数,十二已上从十二,以乘差率,如十四得一为时差。子半至卯半,午半至酉半,以加时余;卯半至午半,酉半至子半,以减时余。加之,满辰法去之,进一辰,余为定时余(I')。[②]

依之,可列出表 1－23:

---

① 刘金沂:《麟德历交食计算法》,《自然科学史研究》,1984 年,第 3 期。

② 《隋书・律历志中》。

表 1—23　大业历日食时差改正表

<table>
<tr><th>条件</th><th>D_1+D_2</th><th colspan="2">条件</th><th>差率</th><th>条件</th><th>I'_0</th></tr>
<tr><td>秋三月，月在内道，月去交 8 时以上到 12 时以内</td><td rowspan="3">$\frac{3(I+24)}{286}$</td><td rowspan="2">D_1 在子、卯、午、酉（仲辰）</td><td>$D_2<143$</td><td>$143-D_2$</td><td>$D_1<3$</td><td>$D_2\pm\frac{(D_1+3)}{14}$差率</td></tr>
<tr><td rowspan="2">春三月，月在内道，月去交 7 时以上</td><td>$D_2>143$</td><td>D_2-143</td><td>$3<D_1<6$</td><td>$D_2\pm\frac{(D_1+2)}{14}$差率</td></tr>
<tr><td colspan="2">D_1 在丑、辰、未、戌（季辰）</td><td>D_2+143</td><td>$6<D_1<9$</td><td>$D_2\pm\frac{(D_1+1)}{14}$差率</td></tr>
<tr><td>秋三月，月在内道，月去交 12 时以上</td><td>$\frac{3(I+48)}{286}$</td><td colspan="2">D_1 在寅、巳、申、亥（孟辰）</td><td>$429-D_2$</td><td>$9<D_1<12$</td><td>$D_2\pm\frac{D_1}{14}$差率</td></tr>
</table>

表 1－23 中，D_1 为依式计算结果的整数部分，即从子半起算的时辰数；D_2 为余数部分（必小于 286），即时余。式中 I 为定朔时刻。又，I'_0 依式计算结果若大于 286，需以 286 减去之，并令 D_1 增 1。关于仲辰等可参见图 1－5。

于是：

$$食甚时刻(I')=D_1+I'_0 \qquad (1-20)$$

唐代傅仁均戊寅历日食时差的表格和算法与大业历大同小异[①]，此不赘述。

综观皇极历和大业历日食时差改正均与日食发生的节气、日月的相对位置（内道或外道）、日月所值的时角等因素有关。这些显然都与月亮视差的大小相关，说明刘焯、张胄玄的思路是不无道理的，但其具体的描述却不尽如人意，即他们并未真正掌握月亮视差对时差大小的影响。关于日食时差认识的发展，我们将在下一章第三节中再做介绍。

三、日食食分大小改正表

刘焯皇极历还最早给出了日食食分大小的改正法。改正值的大小既与日食发生所值的节气有关，又与日食发生与午正的时距有关，这两者实际上都与日食发生时月亮所处的天顶距（Z）的大小相关，亦即与月亮视差对日食食分的影响相关。皇极历日食食分（$g_\odot$）的计算法有如下式：

$$g_\odot=\frac{望差-(A+M)}{96}=\frac{望差-A}{望差}\times 15-\frac{M}{96} \text{②} \qquad (1-21)$$

上式中 M 即为日食食分大小改正值，其正负或大小有如

① 《旧唐书·历志一》，“推日食加时术”。

② 陈美东：《刘焯交食推算法——中国古代交食研究新时期的标志》。见黄盛璋，主编：《亚洲文明》第二集，安徽教育出版社，1992 年。

下述：

月在内者，朔在夏至前后二气，加南二辰，增去交余(A)一辰太；加三辰，增一辰少；加四辰，增太。三气内，加二辰，增一辰[少]，加三辰，增太；加四辰，增少。四气内，加二辰，增太；加三辰及五气内，加二辰，增少。自外所加辰，立夏后、立秋前，依本其气内，加四辰，五气内，加三辰(六气内加二辰)[①]，六气内加二辰者，亦依平。自外所加之北诸辰，各依其去立夏、立秋(白露)[②][日]数，随其依平辰，辰北每以其数三分减去交余；雨水后、霜降前，又半其去分日数，以加二分去二立之日，乃减去交余；其在冬至前后，更以去霜降、雨水日数三除之，以加霜降、雨水当气所得之数，而减去交余，皆为定不食余。[③]

这里"加南二辰"、"加三辰"、"加四辰"等应如图1－6所示，它们与距午正的多少相关。而"增一辰少"、"增太"等即指式(1－21)中的M值。计算时需乘以$\frac{1242}{12}$化为日分值。又从术文的前半部分知：某节气加n辰的M值等于其前一节气加$(n+1)$辰的M值，这一规律亦应适用于术文中"自外所加之北诸辰"以后三句的情况。该后三句都说的是有关节气加四辰的M日分值的计算法：第一句指清明和谷雨、春分和秋分；第二句指惊蛰和寒露、雨水和霜降；第三句则指立冬到立春各节气。于是，依术文意可列出表1－24。

① 此6字与下文重复，应为衍文。

② 此2字应为日字之误。

③《隋书·律历志下》。

表 1—24　皇极历日食食分改正日分值表

M（日分） 加辰 / 节气	加二辰（距午正4.2～8.3刻）	加三辰（距午正8.3～12.5刻）	加四辰（距午正12.5～16.7刻）
小满 芒种 夏至 小暑 大暑	＋181.1（1.75 辰）	＋129.4（1.25 辰）	＋77.6（0.75 辰）
立夏 立秋	＋129.4（1.25 辰）	＋77.6（0.75 辰）	＋25.9（0.25 辰）
谷雨 处暑	＋77.6（0.75 辰）	＋25.9（0.25 辰）	0
清明 白露	＋25.9（0.25 辰）	0	－10.1
春分 秋分	0	－10.1	－15.2
惊蛰 寒露	－10.1	－15.2	－53.3
雨水 霜降	－15.2	－53.3	－60.9
立春 立冬	－53.3	－60.9	－65.9
大寒 小雪	－60.9	－65.9	－71.0
小寒 大雪	－65.9	－71.0	－76.1
冬至	－71.0	－76.1	－81.2

图 1－6　皇极历"加南二辰"等示意图

由表 1－24 和式(1－21)知，当日食发生在近夏至和午正时，M 值较大，$g_{\odot}$ 则较小；当离夏至或午正渐远时，M 值渐小，$g_{\odot}$ 则渐大；当近冬至和远午正时，M 值较小，$g_{\odot}$ 则较大；当离冬至渐远或距午正渐近时，M 值渐大，$g_{\odot}$ 则渐小。我们知道：若日食时，月亮位于黄道北（"月在内者"），月亮的天顶距(Z)越大，月亮视差越大，$g_{\odot}$ 也越大。而当日食发生在近夏至和午正时，Z 较小，$g_{\odot}$ 应较小；当离夏至或午正渐远时，Z 渐大，$g_{\odot}$ 应渐大；当近冬至和远午正时，Z 较大，$g_{\odot}$ 应较大；当离冬至渐远或距午正渐近时，Z 渐小，$g_{\odot}$ 应渐小。由此可知，式(1－21)是刘焯在前人计算法的基础上，正确地虑及了月亮视差对 $g_{\odot}$ 的影响，这也是一项重大的创新。

对于日食发生时，月亮位于黄道南（"月在外者"）的情况，刘焯均取 M 约为正一辰，即＋103.5 日分左右，而由式(1－21)知，这将使 $g_{\odot}$ 总是偏小。这同其时月亮视差总是使日、月间的黄经差增大的效应是相一致的。

张胄玄大业历则给出了日食食分大小节气改正值，其术文曰：

在秋分前者，以去夏至日数乘二千，以减去交余，余为不食余，不足减者，反减十八万四千，余为不食余（亦减望差为定法，其后交值缩，并不减望差，直以望差为定法）。在启蛰后者，以去夏至日数乘千五百[一十]以减之，秋分至启蛰，均减十八万四千，不足减者，如前；大寒至小满，去后交五时外，皆去不食余一时。时差减者，先交减之，后交加之，不足减者食既；值加，先交加之，后交减之，不足减者食。①

由术文知，大业历认定秋分初日到启蛰初日食食分大小的改正值均为 184000；夏至初日为 0；秋分初日到夏至初日（应为 91.31日，以 92 日计），每经一日减 2000；夏至初日到惊蛰初日（应为 121.75 日，以 122 日计），每经一日增 1510，才同惊蛰初日改正值为 184000 相吻合，故现存本术文中"以去夏至日数乘千五百以减之"应做相应改正。依之，可作表 1－25，即为大业历日食食分大小节气改正表。

表 1－25　大业历日食食分大小节气改正表

启蛰初日	夏至前121日	夏至前120日	…	夏至前2日	夏至前1日	夏至初日
184000	182710	181200	…	3020	1510	0
秋分前91日	秋分前90日	…	秋分前2日	秋分前1日	秋分初日至启蛰初日	
2000	4000	…	180000	182000	184000	

① 《隋书·律历志中》。

傅仁均戊寅历“推日食分术”[1]也给出与张胄玄大业历相类似的描述，其节气的分段法和变化幅度均与大业历相一致。它只不过是大业历相应方法的翻版而已。

李淳风麟德历也载有日食食分大小改正之法，其术曰：

> 朔交，月在内道，入冬至毕(定)雨水，及秋分毕大雪，皆以五百五十(八)[二]为食差。入春分，日损六分，毕芒种，入夏至，日益六分，毕白露。以食差减去交分，不足减者，反减食差，为不食分。其不食分，自小满毕小暑，加时在午正前后七刻外者，皆减一时；三刻内者，加一时。大寒毕立春，交前五时外、大暑毕立秋，交后五时外者，皆减一时；五时内者，加一时。诸加时食差应减者，交后减之，交前加之；应加者，交后加之，交前减之。不足减者，皆既；加减入不食限者，或不食。月在外道，冬至初日，无食差。自后日益六分，毕于雨水。入春分，毕白露，皆以五百(二)[五]十二为[食]差。入秋分，日损六分，毕大雪。以[食]差加去交分，为食分。以减后准，余为不食分。十五约食差，以[减]百四，为定法。其不食分，如定法而一，(以减十五，余)得日食分。[2]

自冬至毕雨水(即至春分)、秋分毕大雪(即至冬至)、春分毕芒种(即至夏至)、夏至毕白露(即至秋分)，均为 91.31 日，每日增或损 6 分，若以 92 日计，则共增或损 552 分。故术文中前云 558 为食差，而后云 522 为食差，前后个位数误，而后者十位数误，两者均应改作 552 为食差。依之，可作表 1—26，即为麟德历日食食差表。

① 《旧唐书·历志一》。
② 《新唐书·历志二》。

表 1—26　麟德历日食食差表

<table>
<tr><td rowspan="2">月在内道</td><td>冬至初日到春分初日</td><td>春分后 1 日</td><td>春分后 2 日</td><td>…</td><td>春分后 91 日</td><td>夏至初日</td><td>夏至后 1 日</td><td>夏至后 2 日</td><td>…</td><td>夏至后 91 日</td><td>秋分初日到冬至初日</td></tr>
<tr><td>552</td><td>546</td><td>540</td><td>…</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>12</td><td>…</td><td>546</td><td>552</td></tr>
<tr><td rowspan="2">月在外道</td><td>冬至初日</td><td>冬至后 1 日</td><td>冬至后 2 日</td><td>…</td><td>冬至后 91 日</td><td>春分初日到秋分初日</td><td>秋分后 1 日</td><td>秋分后 2 日</td><td>…</td><td>秋分后 91 日</td><td>冬至初日</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>12</td><td>…</td><td>546</td><td>552</td><td>546</td><td>540</td><td>…</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">其他改正</td><td rowspan="3">…</td><td colspan="2">大寒初日到惊蛰初日</td><td colspan="2" rowspan="3">…</td><td colspan="2">小满初日到大暑初日</td><td colspan="3">大暑初日到处暑初日</td><td rowspan="3">…</td></tr>
<tr><td>交前 5 日外</td><td>交前 5 日内</td><td>距午正 >7 刻</td><td>距午正 <3 刻</td><td>交后 5 时外</td><td colspan="2">交后 5 时内</td></tr>
<tr><td>−1 时</td><td>+1 时</td><td>−1 时</td><td>+1 时</td><td>−1 时</td><td colspan="2">+1 时</td></tr>
</table>

由上术文，并虑及后准$=1553\frac{93.5}{300}\approx 104\times 15$，可列出关于日食食分计算的如下算式：

对于交前而言：

$$日食食分=\frac{后准-(去交分-食差)}{104+\frac{食差}{15}}\approx 15-\frac{15\times 去交分}{后准+食差} \quad (1-22)$$

对于交后而言：

$$日食食分=\frac{后准-(食差+去交分)}{104-\frac{食差}{15}}\approx 15-\frac{15\times 去交分}{后准-食差} \quad (1-23)$$

设食差=0，又去交分=后准时，日食食分应等于0，故知上术文中最后一句“以减十五，余得日食分”当有误，“以减十五，余”应为衍文。

由表1－26可见，李淳风已经注重描述月在内道或外道时，日食食分节气改正值大小的不同，并最先对这项改正用食差命名。我们知道，当月在内道时，冬至(或夏至)时，因月亮视差的影响，将使日食食分增大(或减小)，式(1－22)正可表达这种状况；当月在外道时，冬至(或夏至)时，因月亮视差的影响，将使日食食分减小(或增大)，式(1－23)也正可表达这种状况。可是，李淳风却给出月亮在黄白交点前后两个算式描述之，这表明李淳风在因节气不同所生成的月亮视差对日食食分大小影响的问题上，依然处于含糊不清的境地。

表1－26中“其他改正”栏系指某节气时段内日月相会时距午正前后刻数多少，以及日月距黄白交点远近对日食必全食限(“不食分”)的影响。从小满初日到大暑初日，当距午正前后刻数为3～7刻时，“不食分”不增不减；当月在外道(内道)，距午正大于7刻时，“不食分”需减去(加上)1时。因为其时月亮天顶距较

距午正为 3～7 刻时来得大，月亮视差将使日月相对位置拉远（靠近），故“不食分”需缩小（扩大）；当月在外道（内道）、距午正小于 3 刻时，“不食分”需加上（减去）1 时，因为其时月亮天顶距较距午正 3～7 刻时来得小。虽然月亮视差也将使日月相对位置拉远（靠近），但数量上要小些，故“不食分”可扩大（需缩小）。由此可见，麟德历的这些论述是合理的。

在大衍历中，一行首先给出了节气对日食食分大小影响的食差表，其横向列二十四节气（定气），纵向有“增损差”（每一节气食差的增损量）和“差积”[1]（每一节气的食差值，即“增损差”的累积值），其数值可引载于表 1－27 中。

在应用表 1－27 求算任一时日的食差值时，大衍历应用了不等间距二次差内插法的公式。

大衍历术日食食分的方法是先判别在“阴历食”（日月在内道）或在“阳历食”（日月在外道）。对于“阴历食”而言，食差对于日食食分大小的改正值为$\frac{-差积}{143}\left(或-\frac{差积}{152}\right)$；对于“阳历食”而言，改正值为$\frac{差积}{90}$ $\left(或\frac{差积}{146}\right)$。这些都是与月亮视差对日食食分大小的影响相符合的。

四、月食食分大小的节气改正表

刘焯皇极历月食食分计算法中，还最先给出了节气改正一项，其术曰：

> 望在分后，以去夏至气数（$K_{至}$）三之；其分前，又以去气数（$K_{分}$）倍而加分后者。……九十六而一。[2]

① 《新唐书·历志四下》。
② 《隋书·律历志下》。

表 1—27 大衍历日食食差表

定气	冬至	小寒	大雪	大寒	小雪	立春	立冬	雨水	霜降	惊蛰	寒露	春分	秋分	清明	白露	谷雨	处暑	立夏	立秋	小满	大暑	芒种	小暑	夏至
增损差	增 10	增 15	损 10	增 20	损 15	增 25	损 20	增 30	损 25	增 35	损 30	增 40	损 35	增 45	损 40	增 50	损 45	增 55	损 50	增 60	损 55	增 65	损 60	损 65
差积	积 0	积 10		积 25		积 45		积 70		积 100		积 135		积 175		积 220		积 270		积 325		积 385		积 450

这段术文实际上是一份月食食分大小的节气改正表，依之，可作表 1－28。

表 1－28　皇极历月食食分的节气改正日分值

节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$
冬至	48	春分	18	夏至	0	秋分	18
小寒	43	清明	15	小暑	13	寒露	21
大寒	38	谷雨	12	大暑	14	霜降	24
立春	33	立夏	19	立秋	15	立冬	27
雨水	28	小满	6	处暑	16	小雪	30
惊蛰	23	芒种	3	白露	17	大雪	33

皇极历月食食分取 15 分制，表 1－28 中所列各值的分母为 96。由表 1－28 知，当月食发生在冬至前后时，节气改正项较大（以冬至为最大），g 应较大；当月食发生在夏至前后时，节气改正项较小（以夏至为 0），g 应较小。而由图 1－7 知，当太阳在近地点附近（冬至前后）时，地球影锥截面较大，g 应较大。这说明刘焯虽然已经虑及了太阳所处位置不同对月食食分大小的影响，可惜他未能予以正确地描述。
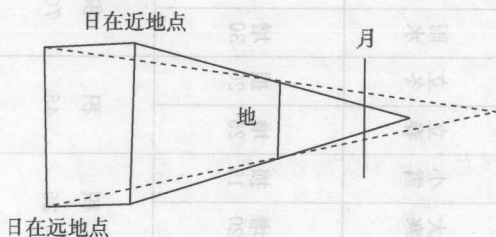
图 1－7　太阳在远近地点对月食食分影响示意图

张胄玄大业历月食食分节气改正术曰：

春后交、秋先交、冬后交，皆去不食余一时，不足去

> 者，食既。余以三万二百三十五为法，得一为不食分。……以减十五，余为食分。[①]

依之可得月食分的算式为：

$$\text{月食食分}=15-\frac{\text{不食余}-\Delta}{30235} \qquad (1-24)$$

式中 Δ 即节气改正值。由之可知，大业历以为春、秋、冬三季月食食分可能增大$\frac{\Delta}{30235}$，这同图 1－7 所示不合，而且以月亮在黄白交点先后作为又一判据，亦不合理，所以，大业历所设定的该项改正是不妥当的。

傅仁均戊寅历也给出月食食分的节气改正，其术曰：

> 望去交分(M)，冬先后交皆去不食分二时；春先交，秋后交，去半时；春后交，秋先交，去二时，夏则依定，不足减者，既。乃以三万六千一百八十三为法而一，以减十五，余为月食分。[②]

依之可得：

$$\text{月食食分}=15-\frac{M-\Delta}{36183} \qquad (1-25)$$

李淳风麟德历的月食食分大小节气改正法是：

> 望去交前后定分(M)，冬，减二百二十四；夏，减五十四；春，交后减百，交前减二百；秋，交后减二百，交前

① 《隋书·律历志中》。

② 《新唐书·历志一》。

减百。不足减者，食既。有余者，以减后准$\left(1553\dfrac{93.5}{300}\right)$，百四而一，得月食分($g_月$)。①

依之可得：

$$g_月=\frac{1553\dfrac{93.5}{300}-(M-\Delta)}{104}\approx 15-\frac{M-\Delta}{104} \qquad (1-26)$$

上二式中Δ均为月食食分的节气改正值。式(1－25)、式(1－26)同式(1－24)均无本质的区别，戊寅历和麟德历月食食分的节气改正存在与大业历完全相同的弊病。刘焯、张胄玄、傅仁均和李淳风关于月食食分节气改正的尝试都是不成功的。自一行大衍历以后，月食食分大小的节气改正法被取消不用，这反倒是一种明智的抉择。

五、食分与全部见食时间关系表

在求得交食的食甚时刻以后(皇极历以月食的定望时刻即等于食甚时刻)，刘焯还发明了计算初亏时刻(C)和复圆时刻(D)的方法。其术曰：

> 准其食分十五分为率，全以下各为衰。十四分以上，以一为衰，以尽于五(分)，每因前衰，每降一分，积衰增二，以加于前。以至三分，每积增四，(二分每增四)，二分增六，一分增十九。皆累算各为衰(L)。三百为率，各衰(L)减之，各以其残乘朔日法(1242)，皆率而一，所得为食衰数(F)。其率全，即以朔日法为衰数。以衰数加减食余

① 《新唐书·历志二》。

(E)，其减者为起(即 C)，加者为讫(即 D)。[1]

这里 E 即指食甚时刻，而欲将 F 化为刻数时，需以"朔辰一百三半"除之。依术文则有：

$$C=E-\frac{F}{103.5},D=E+\frac{F}{103.5}$$

$$F=\frac{(300-L)\times 1242}{300}$$

$$\text{全部见食刻数}=D-C=\frac{2F}{103.5} \qquad (1-27)$$

L 是与食分大小有关的数值。当食分等于 15 时，L 应等于 0，代入上式得 $F=1242$，"其率全，即以朔日法为衰数"正指此。关于 L 的计算，术文中"以尽于五分"的"分"应为衍文，因下文已有指食分而言的"以至三分"之说，而"以尽于五"系指当食分为十四分时以五为衰。又，"二分每增四"亦应为衍文，因下文已说"二分增六"，这一点前人业已指出[2]。依之，可列出表 1—29。

表 1—29　皇极历食分与全部见食时间关系表

食分	积衰增值	衰	累衰	全部见食刻数	食分	积衰增值	衰	累衰	全部见食刻数
1	19	54	283	1.4	9	2	15	60	19.2
2	6	35	229	5.7	10	2	13	45	20.4
3	4	29	194	8.5	11	2	11	32	21.4
4	2	25	165	10.8	12	2	9	21	22.3
5	2	23	140	12.8	13	2	7	12	23.0
6	2	21	117	14.6	14	2	5	5	23.6
7	2	19	96	16.3	15	0	0	0	24
8	2	17	77	17.8					

① 《隋书·律历志下》。

② 《隋书·律历志下》校勘记二十。

由表 1－29 知，皇极历所得绝大多数全部见食时刻均偏大，这说明刘焯在这方面的探索还是十分粗疏的，但他毕竟迈出了可贵的第一步。

其他历法均未给出此类表格，而以直接推算初亏、复满时刻等代替之。

六、太阳天顶距大小与八尺表晷长关系表

为推算全国各地的昼夜漏刻长度、晷长和食差等值，一行在大衍历中给出了太阳天顶距大小与八尺表影长之间存在的数值关系表，它是以文字描述的方式表达的，其术文曰：

南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度，乃初数千三百七十九。自此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。又每度增二，终于四十度，[增五十六分]。[起四十一度]，又每度增六，终于四十四度，增(六)[八]十[分]。[又起四十五度，增一百四十八]。又每度增二，终于五十度，[增一百五十八分]。[起五十一度]，又每度增七，终于五十五度，[增一百九十三分]。[起五十六度]，又每度增十九，终于六十度，增[二]百(六)[八]十[八分]。[又起六十一度，增四百四十八]。又每度增三十三，终于六十五度，[增五百八十分]。又每度增三十六，终于七十度，[增七百六十分]。又每度增三十九，终于七十二度，[增八百三十八分]。[又度]增二百六十。又度增四百四十。又度增千六十。又度增千八百六十。又度增二千八百四十。又度增四千。又度增五千三百四十。[至于八十度]。各为每度差。因累其差，以递加初数，满百为分，分十为寸，各为每度

晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。[1]

依术文之意，可列出表 1－30[2]。

有人认为该表是一份正切函数表，而且是世界上最早的正切函数表[3]。

实际上，严格地说此表并非纯正的正切函数表，而是为解决特定的天文学问题而编制的数值表格，其天文和数学含义应为 $C=8\times \mathrm{tg}Z$。

应用表 1－30，以及二十四节气阳城太阳视赤纬和晷长表，一行可用之推求任一地点的二十四节气晷长表[4]，亦可用之推求任一地点的二十四节气昼夜漏刻和食差表。也就是说，表 1－30 是一行为推求九服晷长、漏刻和食差而设定的起中介作用的专用天文、数学表格。

由表 1－30 知，大衍历夏至时"黄道去极度"为 67.40 度，而"极去戴日度五十六及分八十二半"[5]，则可知阳城冬至时太阳的天顶距为 67.40－56.825＝10.575 度，以此为引数，依表 1－30 可得晷长为 1.4779 尺，与表 1－11 所示大衍历夏至晷长值正合。同理可知，表 1－11 所示大衍历夏至前后八个节气（春、秋分略超过允许范围，其原因待考）的晷长值，均与由表 1－30 算得者相吻合（大衍历"黄道去极度"的分值取 20、35 等整数，小有差异者均在±5 分的允许范围内）。如表 1－30 中（$C-8\mathrm{tg}Z$）栏所示：当 $Z\leqslant 55$ 度时，各区段的平均误差在 0.01 尺到 0.06 尺之间，其中以

---

① 《新唐书·历志四上》及《高丽史》卷五〇。

② 曲安京：《大衍历晷影差分表的重构》，《自然科学史研究》，1997 年，第 3 期。

③ 刘金沂，赵澄秋：《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》，《自然科学史研究》，1986 年，第 4 期。

④ 陈美东：《一行》。见杜石然，主编：《中国古代科学家传记》（上集），科学出版社，1992 年，第 364～365 页。

⑤ 《新唐书·历志四上》。

表1—30　大衍历太阳天顶距(Z)与八尺表晷长(C)关系表

戴日北度 Z	每度晷差增数 A(分)		每度晷差 $B=\sum A$ (分)	每度晷长 $C=\sum B$ (分)	$C-8tgZ$ (尺)	戴日北度 Z	每度晷差增数 A(分)		每度晷差 $B=\sum A$ (分)	每度晷长 $C=\sum B$ (分)	$C-8tgZ$ (尺)
0	每度增1	1	1379	0	0.01	46	每度增2	150	2792	81059	0.01
1		2	1380	1379		47		152	2942	83851	
…		…	…	…		48		154	3094	86793	
24		25	1679	35396		49		156	3248	89887	
25		26	1704	37075		50		158	3404	93135	
26	每度增2	28	1730	38779	0.05	51	每度增7	165	3562	96539	0.06
27		30	1758	40509		52		172	3727	100101	
…		…	…	…		53		179	3899	103828	
39		54	2250	64025		54		186	4078	107727	
40		56	2304	66275		55		193	4264	111805	
41	每度增6	62	2360	68579	0.04	56	每度增19	212	4457	116069	0.12
42		68	2422	70939		57		231	4669	120526	
43		74	2490	73361		58		250	4900	125195	
44		80	2564	75851		59		269	5150	130095	
45	度增68	148	2644	78415	0.02	60		288	5419	135245	

续表

戴日北度 Z	每度晷差增数 A(分)		每度晷差 $B=\sum A$ (分)	每度晷长 $C=\sum B$ (分)	$C-8\mathrm{tg}Z$ (尺)
61	度增160	448	5707	140664	0.14
62	每度增33	481	6155	146371	0.16
63	每度增33	514	6636	152526	0.16
64	每度增33	547	7150	159162	0.16
65	每度增33	580	7697	166312	0.16
66	每度增36	616	8277	174009	0.24
67	每度增36	652	8893	182286	0.24
68	每度增36	688	9545	191179	0.24
69	每度增36	724	10233	200724	0.24
70		760	10957	210957	0.24
71	每度增39	799	11717	221914	0.21
72	度增260	838	12516	233631	0.21
73	度增260	1098	13354	246147	0.07
74	度增440	1538	14452	259501	0.11
75	度增1060	2598	15990	273953	0.36
76	度增1860	4458	18588	289943	0.67
77	度增2840	7298	23046	308531	0.98
78	度增4000	11298	30344	331577	1.16
79	度增5340	16638	41642	361921	1.01
80			58280	403563	0.23
81				461843	1.56

$Z \leqslant 25$度和$Z=46-50$度间为最佳，平均误差为0.01尺，其总平均误差为0.03尺。这是一行$Z-C$表相当成功的部分；在55度$<Z \leqslant 65$度区间，各区段的平均误差在0.12尺到0.16尺之间，而总平均误差为0.14尺，一行$Z-C$表的偏差已开始加大；在65度$<Z \leqslant 74$度区间，各区段的平均误差在0.07尺到0.24尺之间，而总平均误差为0.20尺，一行$Z-C$表的位置又有所增加；在75度$\leqslant Z \leqslant 81$度，各度的误差在0.23尺到1.56尺之间，而是平均误差为0.85尺，一行$Z-C$表的偏差大增，已不可用。这些情况表明，一行对于$Z \leqslant 55$度时，$Z-C$关系的理解与把握是成功的，而对于55度$<Z \leqslant 74$度区间的$Z-C$关系则已渐无把握，而对于$Z>74$度以后的$Z-C$关系更不清楚。

第二章　历表的公式化

在第一章中，我们已介绍了中国古代历法中先列出历表，再依表格计算法推求某种天文量的传统方法。本章则要讨论该传统方法的延伸与发展，即不再列出历表，也不再采用内插法做进一步的计算，而是设定一特定的算式以直接计算各有关天文量。这种方法的最初尝试见于唐代郭献之的五纪历中，该历最先用于日食食差的计算，徐承嗣正元历则继而用之。随后，曹士蒍在符天历中更创用了一种崭新的算式以计算太阳中心差。这些都开创了历表公式化的新方向。此后，经由唐代徐昂、边冈，五代王朴，北宋王处讷、吴昭素、史序、宋行古、周琮、皇居卿、姚舜辅，金代赵知微，元代王恂、郭守敬等人的相继努力，先后把历表的公式化推广到日食时差、气差和刻差、黄赤道度差、太阳视赤纬、昼夜漏刻长度、晷长、月亮极黄纬、交食初亏和复圆时刻、黄白道度差和赤白道度差、月亮和五星中心差、月食食既和生光时刻等历法课题，而且把算式从一次函数式推进到二次、三次、四次乃至五次函数式，从而形成了既便捷又保持相当高的精度，更具数理与天文意义的计算系统，把中国古代历法的代数学体系推向高峰。本章依这类算式出现的先后，对历表公式化的历史状况作一介绍。

第一节　日食气差、刻差算式

一、五纪历和正元历日食食差算式

在第一章第十节中，我们已经提及唐代一行大衍历的日食食差计算法，其日食食差表是以二十四节气为横向栏目的，欲求每一时日的日食食差值可依表用不等间距二次差内插法推求之。而郭献之在五纪历中则直接给出了影响日食食分大小的每日日食食差的计算法，其术曰：

> 太阳每日食差：月在阴历，自秋分后、春分前，皆以四百五十七(三百七十三)为食差；入春分后，日损五(四)分，入夏至初日，损不尽七[二](六[九])；乃自后日益五(四)分，[入秋分初日，益不尽者二(九)]。月在阳历，自春分后、秋分前，亦以四百五十七(三百七十三)为食差；入秋分后，日损五(四)分；入冬至初日，损不尽者七(六)；乃自后日益五(四)分，[入春分初日，益不尽者二(九)]。各得朔日所入定数。①

徐承嗣正元历日食食差术与五纪历大体相同，仅具体数值稍异[见上引文(　)内所示]。依术文意，当月在阴历时，五纪历(正元历)春分后 91 日的日食食差应为 2(或 9)，而夏至食差应为 0，故夏至初日应损 2(或 9)，现传本术文“入夏至初日，损不尽者七(六)”，应据改。又，“乃自后日益五(四)分”之后，应添加“入秋分初日，益不尽者二(九)”之句。同理，当月在阳历时，亦应做相应

① 《新唐书·历志五》。

改动。依此可得二历法日食食差的算式分别为：

五纪历：

$$每日食差=457+5D_1 \qquad (2-1)$$

$D_1 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_1 为定朔时刻与春分的时距；当月在阳历时，D_1 为定朔时刻与秋分的时距。

又，

$$每日食差=5D_2 \qquad (2-2)$$

$D_2 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_2 为定朔时刻与夏至的时距；当月在阳历时，D_2 为定朔时刻与冬至的时距。

又，当月在阴历时，秋分到春分的日食食差均为 457；当月在阳历时，春分到秋分的日食食差亦均为 457。

正元历：

$$每日食差=373-4D_1 \qquad (2-3)$$

$D_1 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_1 为定朔时刻与春分的时距；当月在阳历时，D_1 为定朔时刻与秋分的时距。

又，

$$每日食差=4D_2 \qquad (2-4)$$

$D_2 = 91.31$。当月在阴历时，D_2 为定朔时刻与夏至的时距；当月在阳历时，D_2 为定朔时刻与冬至的时距。

又，当月在阴历时，秋分到春分的日食食差均为 373；当月在阳历时，春分到秋分的日食食差亦均为 373。

上述各食差值，五纪历是以 1340 为分母，正元历则以 1095 为分母，所以，可以说正元历所述各食差值基本上是同五纪历等价的$\left(如\frac{457}{1340} \approx \frac{373}{1095}，等等\right)$。而五纪历日食食差值的设定，是在一行大衍历的基础上有所更动。五纪历和正元历令月在阴历时，秋分初日到春分初日的食差均同；月在阳历时，春分初日到秋分初日的食差也均同，这显然不符合因节气变化导致的月亮视差对

日食食分大小影响的实际，所以，他们对大衍历所做的这一更动是极不成功的。但是，他们将日食食差表公式化的尝试却具有重大的意义，虽然其设定的算式还仅仅是一次函数式。

二、宣明历气差、刻差、加差算式及其对宋初历法的影响

徐昂宣明历首创日食四差（时差、气差、刻差和加差）之法，其中时差是由定朔时刻到食甚时刻的改正值，而气差、刻差和加差则是与日食食分大小有关的改正值，它们实际上就是对日食食分大小产生影响的日食食差值的变种。宣明历气差、刻差和加差的术文分别为①：

二至之初，气差二千三百五十，距二至前后(D_2)，每日损二十(六)[五、小分八十二]，至二分而空。以日出没辰刻距午正刻数(K)约其朔日气差(Q'_1)，以乘食甚距午正刻数(J)，所得以减气差，为定数(Q_1)。春分后，阴历加之，阳历减之。秋分后，阴历减之，阳历加之。

二至初日，无刻差。自后每日益差二、小分十。起立春至立夏，起立秋至立冬，皆以九十四分有半为刻差。自后日损差分二、小分十，至二至之初，损尽。以朔日刻差(Q'_2)乘食甚距午正刻数(J)，为刻差定数(Q_2)。冬至后食甚在午正前、夏至后食甚在午正后，阴历以减，阳历以加；冬至后食甚在午正后、夏至后食甚在午正前，阴历以加，阳历以减。

又立冬初日后，每气增差十七，至冬至初日，得五十一。自后，每气损十七，终于大寒，损尽。若食甚在午正

① 《新唐书·历志六上》。

后，则每刻累益其差，阴历以减，阳历以加。应加减差，同名相从，异名相销，各为食差。以加减去交分，为定分。

依之，宣明历气差(Q'_1)算式应为：

$$Q'_1=2350-25.82D_2 \qquad (2-5)$$

$D_2\leqslant 91$，当$91\leqslant D_2\leqslant 91.31$时，$Q'_1$均为0。$D_2$为定朔时刻与二至的时距。春、秋分后91日至二至，$Q'_1$均等于2350(上术文中，从二至到二分均损2350，其间历91日余，若每日损26，需损2366以上，设每日损26无误，又以91日计，则应损2366；若2350无误，则每日损25、小分82，暂取后者为准)。

宣明历刻差(Q'_2)算式应为：

$$Q'_2=2.1D_2 \qquad (2-6)$$

$D_2\leqslant 45$，$45\leqslant D_2\leqslant 45.66$时，刻差均为94.5。$D_2$为定朔时刻与二至的时距。

又，

$$Q'_2=94.5-2.1D_3 \qquad (2-7)$$

$D_3\leqslant 45$，$45\leqslant D_3\leqslant 45.66$时，$Q'_2$均为0。$D_3$为定朔时刻与立夏或立冬的时距。又，立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间，Q'_2都等于94.5。

宣明历加差值则可列如表2—1。

表2—1　宣明历和仪天历加差数值表

节气	立冬	小雪	大雪	冬至	小寒	大寒	立春	立春到立冬
宣明历	0	17	34	51	34	17	0	0
仪天历	0	20.44	40.88	61.32	40.88	20.44	0	0

欲求任一日的加差值，可依上表以一次差内插法计算之。由

之可见，宣明历加差的计算仍取传统的历表和表格计算法，而对于气差和刻差则取公式算法，但还保留历表和表格计算法的某些特征，其所给算式存在非连续的部分，如气差算式对于 $91 \leqslant D_2 \leqslant 91.31$ 时，刻差算式对于 $45 \leqslant D_2(D_3) \leqslant 45.66$ 时，采用了与历表常用的“依平”相类似的处理方法，这正是从历表和表格计算法向历表公式化的过渡中所留存的痕迹。

宣明历所给气差、刻差、加差之和即为食差，它们均与日月相会时所值的节气以及与午正时刻的时距有关，也就是与月亮的天顶距大小有关，所以，该三差应是月亮视差对于日食食分大小影响的反映。

由气差术文可知：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-8)$$

当 $J=K$（日出没时，月亮天顶距等于 90°）时，$Q_1=0$。这就是说，无论在何节气，也无论月亮在阳历（外道）或阴历（内道），当月亮处于地平方位时，月亮视差对日食食分大小的影响均为 0，这是与实际情况相悖的。当 $J=0$（正午时，月亮天顶距较小），$Q_1=Q'_1$，而从二分后 91 日到二至 Q'_1 均为 2350，这就是说，当月亮处于中天时，无论月亮在阳历或阴历，从二分后 91 日到二至，月亮视差对日食食分大小的影响都是相同的，这也与实际情况相背离。由此看来，宣明历的气差改正是不妥当的。

又由刻差术文知：

$$Q_2 = Q'_2 \cdot J \qquad (2-9)$$

即刻差定数的大小与日月相会时距午正的时刻成正比，这一点是符合月亮视差对日食食分大小影响的效应的，但在二至时，Q'_2 均等于 0，则不与此效应符合，而且宣明历以食甚在午正前或午正后作为 Q_2 为正或负值的判据，这一判据是似是而非的，所以，其刻差改正从总体上看也是不成功的。

而由加差术文可见，也以食甚在午正前、后，作为加差值正负的判据，其加差改正的不成功也可想而知。

质言之，徐昂宣明历气差、刻差和加差三差对于日食食分大小的改正是不成功的。可是，它们对后世历家却产生了巨大的影响。

北宋初王处讷应天历和吴昭素乾元历也用徐昂宣明历的气差和刻差法，分别名曰赤道差和黄道差、离差和晷差，并取消了加差法。而史序仪天历仍沿用气差、刻差和加差，只不过将前二差分别称作赤道食差和黄道食差。这三种历法也都以特定算式来计算每日气差和刻差值。

王处讷应天历"赤道差"(Q_1)术曰：

> 置入盈缩历日及分(D_2)，如九十一日以下，返减之，为初限日；以上者，用减一百八十二日半，余为末限日及分，四因之，用减三百(七)[六]十四，为泛差(Q'_1)。以乘距中分(J)，如半昼分(K)而一，用减泛差，为赤道定分(Q_1)。盈初缩末内减外加、缩初盈末内加外减。[①]

术文中泛差相当于宣明历的气差，赤道定分相当于宣明历的气差定数，盈初缩末和缩初盈末分别指秋分和春分，距中分(或距午分)即食甚时刻与午正的时距，半昼分即太阳出入时刻与午正的时距(下同)。

依术文可得：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right) = (364-4D_2)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-10)$$

D_2 为定朔时刻距二至的日及分数，$D_2 \leqslant 91$，若 $D_2 > 91$，需以

① 《宋史·律历志二》。

182.5 返减之。春、秋分时，$D_2=91$，Q'_1 应等于 0，$91\times4=364$，故现传本术文中“三百七十四”应据改。

应天历求“黄道差”(Q_2)的术文曰：

> 置其朔入历盈缩日及分(D_2)，如四十五日以上、一百三十七日以下，皆以一千五百(乘)[八]为泛差；如四十五日以下，返减之，余为初限日，一百三十七日以上者减去之，余为末限日及分，以六十七乘，半之，用减泛差，以乘距午分(J)，以元法(10002)收为黄道定分(Q_2)。入盈，以定分午前内减外加、午后内加外减；入缩，以定分午前内加外减、午后内减外加。①

依之可得：

当 $45<D_2<137$ 时，

$$Q_2=\frac{1508J}{10002} \tag{2-11}$$

当 $D_2<45$ 时，需以 45 返减之；当 $D_2>137$ 时，需以 137 减去之，

$$Q_2=\frac{J}{10002}\left(1508-\frac{67}{2}D_2\right) \tag{2-12}$$

上二式中，D_2 为定朔时刻与二至的时距，$D_2\leqslant182$。前已述及，宣明历的刻差在二至时为 0(下面我们就要提及乾元历和仪天历亦同)，应天历黄道差在二至时也应为 0。当二至时，$D_2=182$，代入式(2-12)，$\frac{67\times45}{2}=1507.5$(以 1508 计)$\neq1500$，则 $Q_2\neq0$，欲令其等于 0，需将上术文中“一千五百乘”校改为“一千五百八”。

① 《宋史·律历志二》。

显然，王处讷对 Q_2 与节气关系的描述，同宣明历的相应描述从总体走势到正负判定都是相同的。式(2－11)所表述者，与宣明历从立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间的刻差相当；式(2－12)所表述者，则与宣明历从二至到立春或立秋及从立夏或立秋到二至期间刻差的变化状况相当。只是王处讷所认定的黄道差的大小与徐昂有所不同。关于 Q_1 的描述，王处讷也与徐昂所述大体相同。

吴昭素乾元历"离差"(Q_1)术曰：

计春、秋分后(日加入气日)[之气]，以十五乘，[加入气日](D_1)，在九十[一]以下，以九十(一)乘，退为泛差；九十一以上去之，余以九十(一)乘，退一等，以减八百一十九，为泛差。二分气内置入气日，以九十(一)乘，退为泛差，以半昼刻(K)而一，以乘距午分(J)，用加减泛差，为离差(Q_1)……春分后阴加阳减，秋分后阴减阳加。[①]

依术文意，可引出以下二式：

当 $D_1<91$ 时，

$$Q_1=90D_1\left(1-\frac{J}{K}\right) \tag{2-13}$$

当 $D_1>91$ 时，需以 91 减去之，

$$Q_1=\left(819-\frac{90D_1}{10}\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \tag{2-14}$$

式中 D_1 为定朔时刻距二分的时距，$D_1\leqslant182$。由上术文可推知，春、秋分时 Q_1 应为 0。当春、秋分时，$D_1=0$ 或 182，分别代入

① 《宋史·律历志二》。

上二式 Q_1 正得 0。故上术文中三处"九十一乘"均应校改为"九十乘"。由上二式可知，吴昭素以为二至前后对称时日的泛差值，二至前应为二至后的 10 倍，这同徐昂、王处讷的相关描述是不大相同的。但关于离差值的计算法及其正负的判定则与徐昂、王处讷无异。

乾元历求"晷差"(Q_2)术曰：

> 置入气日，以距冬至之气，以十五乘之，以所入气日通之，以一百八十二日以下为入阳历，以上者去之，为入阴历。置入历分(D)，在四十五以下，以三十七乘，五除，退一等，为泛差；在四十五日以上、一百三十七日以下，只用三十三、秒三十为泛差；一百三十七日以上者去之，余以三十七乘，五除，退一位，用减三十二、秒三十，为泛差。皆以距午分(J)乘，为晷差(Q_2)。①

依之可得：

当 $D<45$ 时，

$$Q_2=\frac{37}{50}DJ \tag{2—15}$$

当 $D>137$ 时，需以 137 减去之，

$$Q_2=\left(33.30-\frac{37}{50}D\right)J \tag{2—16}$$

当 $45<D<137$ 时，

$$Q_2=33.30J \tag{2—17}$$

以上 D 均为定朔时刻与冬至的时距，$D<182$，若 $D>182$，需以 182 减去之。由之可见，吴昭素"晷差"算式与徐昂、王处讷的

① 《宋史・律历志二》。

相应算式是相类似的。

接着再来讨论史序仪天历三差的算法，其求“赤道食差”(Q_1)的术文曰：

> 二分后益差至二至，损差皆二千八百二十六，自后累减至二分空。冬至后日损三十一、小分八十，夏至后日益三十、小分十五。又以宗法(10100)乘积差，各以盈缩初末限分(93.7142 和 88.8811)除之，为日差；乃以末限(春、秋分后)累增、初限(冬、夏至后)累损，各为每日食差(Q'_1)；又以半昼刻数(K)约其日食差，以乘食甚距午正刻(J)，所得以减食差，余为定数(Q_1)。余同乾元。①

依之可得：

冬至前后，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=(2826-31.80D)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-18)$$

$D\leqslant 88.8811$，D 为定朔时刻与冬至的时距。

夏至前后，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=(2826-30.15D_4)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-19)$$

$D_4\leqslant 93.7142$，D_4 为定朔时距与夏至的时距。

仪天历 Q'_1 以 10100 为分母，而宣明历 Q'_1 则以 8400 为分母，$\frac{2826}{10100}\approx\frac{2350}{8400}$(这也正是我们在讨论宣明历气差术文时，以为 2350 无误的主要依据)。由此看来，仪天历赤道食差算式是在宣

① 《宋史·律历志二》。

明历相关算式的基础上稍做修订，将冬至和夏至前后的日数以定气日数入算，并对每日损益数做相应调整。

仪天历求“黄道食差”(Q_2)术曰：

> 二至后(D_2)日益差至立春、立秋，得一百一十三、小分六十二半，立夏、立冬后(D_3)每日损，以宗法(10100)乘之；冬至、立冬后三气用四十四万二千三百八十四，夏至、立夏后各三气用二十七万九千八百五十八除，为食差(Q'_2)；以食甚距午正刻(J)乘其日食差，为定差(Q_2)。冬至后，甚在午正东，阴减阳加；甚在午正西，阴加阳减。夏至后即返此。①

依之可得以下算式：

(黄道食差)$'=2.525D_2$，$D_2\leqslant45$，$45\leqslant D\leqslant45.66$ 时，(黄道食差)$'$均为 113.625，D_2 为定朔时刻与二至的时距。又，(黄道食差)$'=113.625-2.525D_3$，$D_3\leqslant45$，$45\leqslant D_3\leqslant45.66$ 时，(黄道食差)$'$均等于 0，D_3 为定朔时刻与立夏或立冬的时距。又，立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间，(黄道食差)$'$均为 113.625。至此，若与宣明历的 Q'_2 比较，不难发现两者是相类似的。又虑及 $\frac{2.1}{8400}=\frac{2.525}{10100}$，所以，仪天历的(黄道食差)$'$实即宣明历的 Q'_2。当然，仪天历的 Q'_2 是在此基础上有所变化：

$$Q_2=Q'_2J \qquad (2-20)$$

冬至后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{442384}\times2.525D_2$$

① 《宋史·律历志二》。

夏至后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{279858}\times2.525D_2$$

立冬后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{442384}(113.625-2.525D_3)$$

立夏后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{279858}(113.625-2.525D_3)$$

立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间，Q'_2 均等于 10100×113.625。

由此看来，史序认为冬至前后三气与夏至前后三气的 Q'_2 值是不相同的，后者要较前者为大，这同徐昂等人所述存在明显的差异。但从算式总体上考察，仍不脱徐昂的框架。从仪天历的"加差"术，更可以看到它受宣明历的影响：

> 立冬初日后，每气益差二十、秒四十四，至冬至初日加六十(二)[一]、秒三十二；自后每气损差二十、秒四十四，终于大寒。甚在午正西，即每刻累益其差，阴历加，阳历减。①

此术文与宣明历加差的术文十分类似。立冬到冬至、冬至到大寒均历三个节气，每节气损差 20.44，三个节气损益应为61.32，故上术文应据改。依此可将仪天历加差列于表 2－1 中。又虑及宣明历和仪天历加差值的分母分别为 8400 和 10100，遂有 $\frac{\text{宣明历加差值}}{8400}=\frac{\text{仪天历加差值}}{10100}$，所以，仪天历加差不过是宣明历

① 《宋史・律历志二》。

加差的翻版而已。

三、崇天历及其后诸历法的气差、刻差算式

下面我们再来介绍后世其他历法的气差和刻差算式。

宋行古崇天历气差定数(Q_1)算式的术文曰：

> 置其朔中积(D)，满二至限(182.62)去之，余在一象(91.31)以下为在初；已上，复减二至限，余为在末。皆自相乘，进二位，满二百三十六除之，用减三千五百三十三，为气差(Q'_1)，以乘距午定分(J)，半昼分(K)而一，所得，以减气差，为定数(Q_1)。①

依术文意则有：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(3533-\frac{100}{236}D^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-21)$$

上式中 D 为定朔时刻与冬至的时距。$D<182.62$，若 $D>182.62$，需减去 182.62；又，$D<91.31$，若 $D>91.31$，需以 182.62 返减之。这是一个包含常数项和二次项的函数式，与前述各历法的相关算式均用一次函数式是不相同的。当 $D=0$(冬至时)，或 $D=182.62$(夏至时)，代入式(2－21)，得$Q'_1=3533$；当 $D=91.31$(春分时)，或 $D=273.93$(秋分时)，代入式(2－21)，得 $Q'_1=0$。这就是说，式(2－21)是表述 Q'_1 在二至时达到极大，而在二分时等于 0 的二次函数式。对 Q'_1 的这种表述，从总体上与前述宣明历等历法对 Q'_1 的描述并无本质差别，只是新瓶装老酒而已。对于 Q_1 算式的总体估价，亦当作如是观。

崇天历刻差定数(Q_2)算式的术文为：

① 《宋史·律历志六》。

> 置其朔中积(D),满二至限(182.62)去之,余[置于上],列二至限于下,以上减下,余以乘上,进二位,满二百三十六除之,为刻差(Q'_2),以乘距午定分(J),四因之,枢法(10590)而一,为定数(Q_2)。[1]

依之可列出下式:

$$Q_2=\frac{4}{10590}Q'_2J \qquad (2-22)$$

$$Q'_2=\frac{100}{236}(182.62-D)D \qquad (2-23)$$

式中,J、D 等的含义同式(2—21)。上术文中,置某某于上,列某某于下,以上减下,余以乘上云云,是唐代曹士蒍在符天历中首创、边冈在崇玄历中表述为先相减后相乘法(详见本章第二节)又一种典型的表述方式,这种表述方式在后世历法中广为采用。它所表述的是包括有一次项和二次项的函数式。当 $D=0$(冬至时),或 $D=182.62$(夏至时),代入式(2—23),得 $Q'_2=0$;当 $D=91.31$(春分时),或 $D=273.93$(秋分时),代入式(2—23),得 $Q'_2=3533$。这就是说,式(2—23)是表述 Q'_2 在二至时为0,在二分时达到极大的二次函数式。对 Q'_2 的这种表述,与前述宣明历等历法对 Q'_2 的描述有较大的不同。如,宋行古并不认为从立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间的 Q'_2 均等,而认为在此期间,Q'_2 值是以春分(或秋分)为极大值,循式(2—23)所示的二次曲线变化的。而且宋行古还认为 Q'_2 的大小与 Q'_1 的大小处于同一个量级,这也与徐昂等人的描述大不相同。可是,宋行古对 Q'_2 的这些新描述,也不符合月亮视差对日食食分大小影响的实际状况:

---

[1] 《宋史·律历志六》。

冬至时影响较大,夏至时影响较小,而二分时居中。所以,宋行古对于Q'_2值的描述也是不成功的。但宋行古所给出的气差和刻差算式的两种不同的二次函数式,却对后世相关算式产生了巨大的影响。

对于气差和刻差,周琮明天历分别称之为南北差(Q_1)和东西差(Q_2),其术依次为①:

> 求日食四正食差定数:置其朔加时定日(D),如半周天(182.6282)以下者为在盈,以上者去之,余为在缩。视之如在初限(盈初限 60.875、缩初限 121.75)以下者为在初;以上者,复减二至限(182.625),余为在末。置初、末限度及分,置于上位,到二百四十三度半于下,以上减下,余以下乘上,以一百六乘之,满三千九十三除之,为东西食差泛数(Q'_2),用减五百八,余为南北食差泛数(Q'_1)。
>
> 其求南北食差定数者,乃视午前、后分(J),如四分法之一(9750)以下者复减之,余以乘泛数(Q'_1);若以上者即去之,余以乘泛数,皆满九千七百五十除之,为南北差定数(Q_1)。
>
> 其求东西食差定数者,乃视午前、后分(J),如四分法之一(9750)以下者以乘泛数(Q'_2);以上者,复减半法(19500),余乘泛数,皆满九千七百五十除之,为东西差定数(Q_2)。

依术文意,可列出以下诸算式:

① 《宋史·律历志八》。

$$Q_1=\frac{1}{9750}Q'_1J \qquad (2-24)$$

$$Q'_1=508-\frac{106}{3093}(243.5-D)D \qquad (2-25)$$

$$Q_2=\frac{1}{9750}Q'_2J \qquad (2-26)$$

$$Q'_2=\frac{106}{3093}(243.5-D)D \qquad (2-27)$$

式中 D 为定朔时刻与冬至的时距，若 $D<182.6282$，为在盈限，若 $D>182.6282$，需以 182.6282 返减之，余为在缩限。对于盈限而言，当 $D<60.875$ 时，为在初限；当 $D\geqslant60.875$ 时，需以 182.625 返减之，余为在末限。对于缩限而言，当 $D<121.75$ 时，为在初限；当 $D\geqslant121.75$ 时，需以 182.625 返减之，余为在末限。J 的含义为食甚与午正时刻的时距。式(2－24)和式(2－26)是一包括常数项、一次和二次项的函数式，这与前述各历法的相关算式不同，而且它们也与定朔日太阳出没时刻与午正的时距(K)无关，这又是重要的区别之一。又由式(2－24)和式(2－26)知，Q_1 和 Q_2 的大小与 J 成正比，这同月亮视差对日食食分大小影响的效应是相符的。

当 $D=0$(冬至时)，或 $D=182.6282$(夏至时)，代入式(2－25)，得 $Q'_1=508$；当 $D=60.875$(雨水时)，或 $D=243.5032$(处暑时)，代入式(2－25)，得 $Q'_1=0$。这就是说，式(2－24)是表达 Q'_1 在二至时达到极大值，而在雨水或处暑时为 0 的二次函数式。它与崇天历所描述的 Q'_1 变化的不同之处仅在于，将 $Q'_1=0$ 从春分推前两个节气(雨水)，从秋分向前推两个节气(处暑)。当 $D=0$(冬至时)，或 $D=182.6282$(夏至时)，代入式(2－27)，得 $Q'_2=0$；当 $D=60.875$(雨水时)，或 $D=243.5032$(处暑时)，代入式(2－27)，得 $Q'_2=508$。即式(2－26)是表述 Q'_2 在二至时为 0，而在雨水或处暑时为极大值的二次函数式。同理，它与崇天历所

描述的 Q'_2 变化的差异仅在于，将 Q'_2 为极大值时，从二分分别推前至雨水或处暑。周琮对于 Q'_1 和 Q'_2 的描述做这样的调整，并未突破宋行古所设置的总体框架。

皇居卿观天历气差定差(Q_1)算式的术文曰：

> 置其朔盈、缩限度及分(D_2)，自相乘，进二位，盈初、缩末(指冬至后盈初、夏至后缩末限日 88.91)一百九十七而一，盈末、缩初(指夏至后缩初、冬至后盈末限日 93.71)二百一十九而一，皆用减四千一十，为气泛差(Q'_1)。以乘午前、后分(J)，如半昼分(K)而一，所得，以减[气]泛差，为定差(Q_1)。[1]

依术文意，可列出下式：

当在冬至后盈初、夏至后缩末(冬至前后)时，$D_2<88.91$，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(4010-\frac{100}{197}D_2^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-28)$$

当在夏至后缩初、冬至后盈末(夏至前后)时，$D_2<93.71$，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(4010-\frac{100}{219}D_2^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-29)$$

式中 D_2 为定朔时刻与二至的时距。式(2－28)、式(2－29)和式(2－21)并无本质的不同，皇居卿只是将宋行古所述 $Q'_1=0$ 的时日从平春、秋分改为定春、秋分。

观天历刻差定差(Q_2)算式的术文是：

> 置其朔盈、缩限度及分(D_2)，与半周天(182.63)相减相乘，进二位，二百九而一，为刻泛差(Q'_2)。以乘午

① 《宋史·律历志十一》。

前、后分(J)，如三千七百半而一，为定差(Q_2)。[1]

依此可得：

$$Q_2=\frac{1}{3700.5}Q'_2J$$

$$Q'_2=\frac{100}{209}(182.63-D_2)D_2 \qquad (2-30)$$

式中 D_2 的含义与式(2—29)同。该算式回复到宋行古所给的函数形式上去是显而易见的。

姚舜辅纪元历气差定数(Q_1)算式术文是：

置日食甚行积度及分(D_5)，满二至限(182.6218)去之，余在象限(91.3109)已下为在初；已上，复减二至限，余为在末。皆自相乘，进二位，满三百四十三而一，所得，用减二千四百三十，余为气差(Q'_1)，以午前、后分(J)乘之，如半昼分(K)而一，以减气差，为气差定数(Q_1)。[2]

依术文意，遂有：

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(2430-\frac{100}{343}D_5^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-31)$$

式中，D_5 为食甚时刻与冬至的时距，$D_5<182.6218$，若 $D_5>182.6218$，需减去 182.6218；又，$D_5<91.3109$，若 $D_5>91.3109$，需以 182.6218 返减之。若将式(2—21)和式(2—31)作比较，虑及该二式 Q_1 值的分母分别为 10590 和 7290，则$\frac{3533}{10590}$与$\frac{2430}{7290}$之差

① 《宋史·律历志十一》。

② 《宋史·律历志十三》。

小于 3×10^{-4}，$\frac{100}{236\times10590}$与$\frac{100}{343\times7290}$之差小于 2×10^{-8}，这说明式(2－31)与式(2－21)实际上是等价的。

纪元历刻差定数(Q_2)术曰：

> 置日食甚日行积度及分(D_5)，满二至限(182.6218)去之，余[置于上]，列二至限于下，以上减下，余以乘上，进二位，满三百四十三而一，所得，为刻差(Q'_2)；以午前、后分(J)乘而倍之，如半法(3645)而一，为刻差定数(Q_2)。①

依之可得：

$$Q_2=\frac{2}{3645}Q'_2J \qquad (2-32)$$

$$Q'_2=\frac{100}{343}(182.6218-D_5)D_5$$

式中 D_5 含义同式(2－31)。将式(2－22)与式(2－32)相比较，$\frac{400}{236\times10590}$与$\frac{200}{3645\times343}$之差小于 8×10^{-8}，亦可见式(2－32)与式(2－22)是等价的。

姚舜辅 Q_1 和 Q_2 算式为南宋诸历沿用不弃。而金代赵知微重修大明历气差定数(Q_1)算式的术文为：

> 置日食甚日行积度及分(D_5)，满中限(182.6218)去之，余在象限(91.3109)以下，为初限；以上，复减中限，为末限。皆自相乘，进二位，如四百七十八而一，所得，用减一千七百四十四，余为气差恒数(Q'_1)，以午前、

① 《宋史·律历志十三》。

后分(J)乘之，半昼分(K)除之，所得，以减恒数为定数(Q_1)。[1]

依之，可列出下式：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(1744-\frac{100}{478}D_5^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-33)$$

式中 D_5 的含义同式(2－31)。若将式(2－21)与式(2－33)比较，又虑及二式 Q_1 值分母分别为 10590 和 5230，则有$\frac{3533}{10590}$与$\frac{1744}{5230}$之差小于 2×10^{-4}，$\frac{100}{236\times10590}$与$\frac{100}{478\times5230}$之差小于 2×10^{-8}，故式(2－33)与式(2－21)实际上也是等价的。

重修大明历刻差定数(Q_2)算式的术文为：

置日食甚日行积度及分(D_5)，满中限(182.6218)去之，余与中限相减相乘，进二位，如四百七十八而一，所得，为刻差恒数(Q'_2)。以午前、后分(J)乘之，日法四分之一(1307.5)除之，所得为定数(Q_2)。[2]

依此可得：

$$Q_2=\frac{1}{1307.5}Q'_2J \quad (2-34)$$

$$Q'_2=\frac{100}{478}(182.6218-D_5)D_5$$

式中 D_5 含义同上。将式(2－34)与式(2－22)及式(2－32)比较，$\frac{400}{236\times10590}$与$\frac{100}{478\times1307.5}$之差小于 5×10^{-8}；$\frac{200}{3645\times343}$

① 《金史·历志下》。

② 《金史·历志下》。

与$\frac{100}{478\times1307.5}$之差小于$4\times10^{-8}$。可见,式(2—34)同式(2—22)及式(2—32)应该说都是等价的。

元代耶律楚材的气差和刻差算式与重修大明历全同。

郭守敬授时历也给出有关算式,称气差为南北差,称刻差为东西差,与周琮明天历的名称相同。

授时历南北差定差(Q_1)算式的术文曰:

> 视日食甚入盈缩历定度(D_6),在象限(91.314375)已下,为初限;已上,用减半岁周(182.62125),为末限。以初、末限度自相乘,如一千八百七十而一,为度,不满,退除为分秒,用减四度四十六分,余为南北泛差(Q'_1)。以距午定分(J)乘之,以半昼分(K)除之,以减泛差为定差(Q_1)。①

依此可得:

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(4.46-\frac{D_6^2}{1870}\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-35)$$

式中,D_6 为食甚时刻与二至的时距,$D_6<91.314375$,若$D_6>91.314375$,需以 182.62125 返减之。

授时历东西差定差(Q_2)算式的术文是:

> 视日食甚入盈缩历定度(D_6),与半岁周(182.62125)相减相乘,如一千八百七十而一,为度,不满,退除为分秒,为东西泛差(Q'_2),以距午定分(J)乘

① 《元史·历志四》。

之，以日周四分之一(2500)除之，为定差(Q_2)。①

依之则有：

$$Q_2=\frac{1}{2500}Q'_2J=\frac{JD_6}{2500\times1870}(182.62125-D_6) \quad (2-36)$$

式中，D_6 的含义和界定均同式(2－35)。由之可见，授时历 Q_1 和 Q_2 算式仍取用与宋行古崇天历相同的函数形式。

综上所述，关于月亮视差对于日食食分大小改正值的计算，自唐代郭献之五纪历开始了公式化的尝试，徐承嗣正元历则承用了五纪历的方法。徐昂在宣明历中，首创将该改正值辟为气差、刻差和加差三项加以计算，对于气差和刻差也给出了公式化的算式，而且它关于气差和刻差对日食食分大小影响的基本观念，对后世产生了巨大的影响。北宋以后各历法(除仪天历外)均只用气差和刻差二法。北宋初年王处讷应天历、吴昭素乾元历和史序仪天历的相关算式均在继承徐昂算式的基础上，小作调整，而自宋行古崇天历以后才发生较大的变化。

关于气差定数(或定差)算式，宋行古应用的自相乘二次函数式，为姚舜辅、赵知微等人继而用之，可见影响之大。周琮南北食差定数算式与之不同，它是由东西食差定数算式派生出来的，其函数形式属先相减、后相乘的类型。就函数形式而言，皇居卿和郭守敬等人的气差定差算式亦采用宋行古的形式，但设定了不同的系数，这是皇居卿、郭守敬等人认定的气差定数大小与宋行古不同所致。此外，皇居卿认为气差定数大小因盈缩限不同而异，这也是其算式与宋行古算式的差异所在。

关于刻差定数(或定差)算式，宋行古应用先相减、后相乘的二次函数形式，这为周琮、皇居卿、姚舜辅、赵知微和郭守敬等人

① 《元史·历志四》。

沿用不弃，其中姚舜辅、赵知微算式实际上是宋行古算式的翻版，而周琮、皇居卿和郭守敬等人的算式则是取用了不同的系数，这是因为他们认定的刻差定数（或定差）的大小与宋行古所认定者有所不同。

由上述气差和刻差定数（或定差）算式可知，中国古代历家认为气差和刻差的大小是与日食定朔（或食甚）时日月的时角有关，又与日食发生所值的季节有关。时角不同意味着月亮的天顶距不同，季节不同也意味着月亮的天顶距各异，所以，气差和刻差应是与月亮视差有关的改正值，当无疑问。可惜，中国古代历家从总体上并未对此做出成功的描述，甚或以食甚发生于午正前或后作为气差和刻差（还有加差）为正或负值的判据，这更是不正确的。关于上述算式精度的定量分析，是一个十分复杂的问题，尚有待进一步的研究。

第二节　日月五星中心差算式

一、太阳中心差算式

1964 年，日本学者中山茂在日本天理图书馆发现了唐代曹士芀符天历的残本。该残本列有一表格，载冬至以后每经 1 度（从 1 度到 182 度）太阳实际行度（V）与平均行度（M，以太阳每日运行 1 度计）之差，称为“盈缩度分”，以及“盈缩度分”的累积值，即（$V-M$），称“差积度分”。在此表格之末附有一段说明文字。经中山茂研究，这一段说明文字表述的是如下计算公式：①

$$V-M=\frac{M}{3300}(182-M) \qquad (2-37)$$

① 中山茂：《符天历在天文学史上的地位》，载日本《科学史研究》71 号，1964 年。

还需指出的是，M 为所求日太阳距冬至的平均行度值（下同），在应用式（2－37）时，当 $M<182$ 度时为盈历，而当 $M>182$ 度时为缩历（需以 182 度减去之）。无论在盈、缩历，$M<91$ 度，若 $M>91$ 度，则需以 182 度返减之。所谓盈历（或疾历）是指其时 $V-M$ 为正值；而缩历（或迟历）是指其时 $V-M$ 为负值。$V-M$ 即为所求日太阳实行度与平行度之差（下同）。

依式（2－37）对残本表载值进行核算，除两处有小误外[①]，其余均相吻合。这可以证明式（2－37）是可信的。式（2－37）便是中国古代最早出现的太阳中心差算式，而残本所示的表格当是依此算式计算列出的，它不但在形式上与传统的日躔表不同（它每隔 1 度给出一组差值，而传统日躔表则以二十四节气为单位），而且在内容上也与传统日躔表有本质的差别（传统日躔表给出的是具有 24 个奇点的变化曲线，而它给出的则是无奇点的连续变化的二次曲线），这也正是历表及表格计算法同公式化算法重要的差别之一。

符天历之所以既给出如式（2－37）所示的算式，又给出由之派生的新型表格，大约是为适应传统的应用表格进行计算的习惯，而且在应用新型表格进行计算时只需采用一次差内插法，既较方便又可保持必要的精度，所以也不失为一种有效的方法。这种以公式为基础的表格计算法，在近现代数学、天文学等学科的许多问题的计算中，仍是一种广泛应用的方法，从这个意义上看，曹士蒍乃是应用这类计算法的先驱者。

第一位继承并发展曹士蒍发明的太阳中心差算式者是唐末的边冈。边冈在崇玄历中列有传统的日躔表，并用表格计算法以

---

① 当 M 为 52 度和 130 度时，表载差积度分小分值一为 84，一为 85，据式（2－37）算应为 85；当 M 为 32 度和 150 度时，表载盈缩度分小分为 57，据式（2－37）算应为 60。

推求节气、朔望等的时刻。而在推求五星运动从常合日到定合日的改正值时，即考虑太阳运动不均匀性对五星定合时刻的影响时，边冈则给出了形式和内容都不相同的算法：

视定积(M)如半交(181.8682)已下，为在盈；已上，去之，为在缩。所得，令半交度先相减，后相乘，三千四百三十五除，为度(V－M)。[1]

依此可列出下式：

$$V-M=\frac{1}{3435}(181.8682-M)M \qquad (2-38)$$

式中，M＜181.8682度，若M＞181.8682度，需以181.8682度减去之。

从形式上看，式(2－38)与式(2－37)相同是显而易见的，边冈只是在具体数值上有所修正而已。由上引术文知，边冈将曹士蒍所首创的二次函数以“先相减，后相乘”的术语来描述，这一术语遂成为被广泛应用的描述此类二次函数的专用术语之一。还需指出的是，崇玄历的日躔表和依式(2－38)计算而得的相应表格是不相吻合的，也就是说其日躔表不是由式(2－38)计算而得的。显然，边冈认为依传统的日躔表及表格计算法求得的太阳运动不均匀性改正值需精细些，故用之于气朔等的计算，而依式(2－38)算得的改正值要粗略些，故用之于对太阳运动不均匀性改正精度的要求不必太高的五星定合时刻的计算。由此我们看到了在同一部历法中，两种不同的计算太阳中心差的方法并存不悖的例子。

随后，太阳中心差算式又见于北宋史序的仪天历中，该算式

① 《新唐书·历志六下》。

的术文有如下述：

> 以宗法（10100）乘盈缩积（24543），以其限分（897699.5或946785.5）除之，为限率分；倍之，为初、末限平率（E）；日分（即宗法）乘之，亦以限分除之，为日差（F）；半之，加减初、末限平率，在初者减初加末，在末者减末加初，为初、末定率；乃以日差累加减限初、末定率，初限以减，末限以加，为每日盈缩定分（$V-M$）。[1]

依之可列出以下算式：

$$V-M=\frac{1}{10100}\left[M\left(E-\frac{1}{2}F\right)-\frac{M(M-1)}{2}F\right] \quad (2-39)$$

对于冬至后盈初（$M<88.8811$ 日）和夏至后缩末（$M>93.7412$日，需以182.62日返减之）时，

$$E=\frac{24543\times10100\times2}{897699.5};F=\frac{10100}{897699.5}E$$

对于夏至后缩初（$M<93.7412$ 日）和冬至后盈末（$M>88.8811$日，需以182.62日返减之）时，

$$E=\frac{24543\times10100\times2}{946785.5};F=\frac{10100}{946785.5}E$$

若将这两组E与F分别代入式(2—39)可得：

对于盈初、缩末：

$$V-M=\frac{M}{3250.9699}(177.7623-M) \quad (2-40)$$

对于缩初、盈末：

$$V-M=\frac{M}{3616.2144}(187.4823-M) \quad (2-41)$$

---

① 《宋史·律历志一》。

虽然史序采用了如式(2—39)所示的相当繁杂的太阳中心差算式表述法，但式(2—40)和式(2—41)乃是其算式的实质性形式，它们与式(2—37)的形式是相同的。考察该二式中所用系数与式(2—37)和式(2—38)稍有不同，但仍不难看到受式(2—37)和式(2—38)影响的迹象。当然，史序并非简单地袭用式(2—37)，而是在太阳视运动重新研究的基础上，参照曹士蒍的方法加以总结的。

北宋周琮明天历关于太阳中心差算式的术文是：

> 各置朔、弦、望所入盈缩度及约分(M)，如在象度分(91.3109)以下者为在初；已上者，覆减二至限(182.6218)，余为在末。置初、末度分于上，列二(至)[百]于下，以上减下，余以下乘上，为积数，满四千一百三十五除之为度，不满，退除为分，命曰盈缩差度及分($V-M$)。①

依术文意，其算式应为：

$$V-M=\frac{M}{4135}(200-M) \qquad (2-42)$$

式中，$M<182.6218$ 时，为盈历；若 $M>182.6218$，为缩历(需以 182.6218 减去之)。无论在盈、缩历，$M<91.3019$，若 $M>91.3019$，需以 182.6218 返减之。

北宋皇居卿观天历也给出了太阳中心差算式，其术曰：

> 求每日盈缩分($V-M$)：置入二至后全日(M)，各在

① 《宋史·律历志七》。

初限$\left(\text{冬至后盈初}88\frac{10958}{12030}\text{，夏至后缩初}93\frac{8552}{12030}\right)$已下，为初限；已上，用减二至限$\left(182\frac{7480}{12030}\right)$，余为末限。列初、末限日及分于上，倍初、末限日及约分于下，相减相乘。求盈缩分者，在盈初、缩末，以三千二百九十四除之；在盈末、缩初，以三千六百五十九除之，皆为度，不满，退除为分秒。[①]

依术文意，其算式应分别为：

对于冬至后盈初$\left(M<88\frac{10958}{12030}\right)$、夏至后缩末$\left(M>93\frac{8552}{12030}\text{，需以}182\frac{7480}{12030}\text{返减之}\right)$时：

$$V-M=\frac{M}{3294}(177.8218-M) \quad (2-43)$$

对于夏至后缩初$\left(M<93\frac{8552}{12030}\right)$和冬至后盈末$\left(M>88\frac{10958}{12030}\text{，需以}182\frac{7480}{12030}\text{返减之}\right)$时：

$$V-M=\frac{M}{3659}(187.4218-M) \quad (2-44)$$

将式(2－40)、式(2－43)、式(2－41)和式(2－44)加以比较，不难看出它们十分相似，可以说后二式是参照前二式稍做修订而得的，只是对于算式的表述，皇居卿采用了较史序简明的方式。

上述五种历法取用的太阳中心差算式同属一种类型，给出的是一个包括一次项和二次项的二次函数式。太阳中心差算式的另一种类型则见于元代郭守敬等人的授时历中，其术曰：

① 《宋史·律历志十》。

> 视入历盈者，在盈初缩末限(88.909225)已下，为初限，已上，返减半岁周(182.62125)，余为末限；缩者，在缩初盈末限(93.712025)已下，为初限，已上，返减半岁周，余为末限。其盈初缩末者，置立差三十一，以初末限(M)乘之，加平差二万四千六百，又以初末限乘之，用减定差五百一十三万三千二百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒；缩初盈末者，置立差二十七，以初末限乘之，加平差二万二千一百，又以初末限乘之，用减定差四百八十七万六百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即所求盈缩差($V-M$)。[①]

依术文意，其算式应分别为：

对于冬至后盈初($M<88.909225$)和夏至后缩末($M>93.712025$，需以182.62125返减之)时，

$$V-M=[5133200-(24600+31M)M]M\times10^{-8} \quad (2-45)$$

对于夏至后缩初($M<93.712025$)和冬至后盈末($M>88.909225$，需以182.62125返减之)时，

$$V-M=[4870600-(22100+27M)M]M\times10^{-8} \quad (2-46)$$

这是应用三次差内插法而得的太阳中心差算式，是包含一次项、二次项和三次项的函数式，它们是王恂、郭守敬等人对招差法的应用与发展。

以上便是中国古代历法中太阳中心差算式的基本情况，它们所达到的精度可做如下简要介绍：令$M=91$代入式(2—37)、$M=90.9341$代入式(2—38)、$M=88.8815$代入式(2—40)或$M=$

① 《元史·历志三》。

93.74115代入式(2－41)、M＝91.3019代入式(2－42)、M＝88.9109代入式(2－43)或M＝93.7109代入式(2－44)、M＝88.909225代入式(2－45)或M＝93.712025代入式(2－46)，可分别算得曹士蒍、边冈、史序、周琮、皇居卿和郭守敬等人所取用的太阳中心差的最大值为148′.4、142′.4、143′.7、141′.9、141′.9和142′.0[①]。而自曹士蒍至郭守敬所处的年代，太阳中心差最大值应在118′.3至116′.9之间变动，可见边冈太阳中心差最大值的精度较曹士蒍所取值有所提高，其后多数历法所取值的精度又较边冈略有改进。这些太阳中心差算式所表达的太阳实行度值与相应理论值的平均误差均大略保持在相应年代日躔表的水平之上。

二、月亮和五星中心差算式

最先给出月亮和五星中心差算式者是北宋的周琮。他在明天历中分别给出下述术文[②]。

对于月亮运动迟疾改正的算式，其术曰：

> 置所求月行入迟(速)[疾]度(M)，如在象度(92.0927)以下，为在初；以上，覆减中度(184.1854)，余为在末。其度余用约分，百为母。置初、末度于上，列二百一度九分于下，以上减下，余以下乘上，为积数，满一千九百七十六除为度，不满，退除为分，命曰迟疾差度[$(V-M)'$]。

依其意，算式可列为：

① 陈美东：《我国古代的中心差算式及其精度》，《自然科学史研究》，1986年，第4期。

② 《宋史·律历志八》。

$$(V-M)'=\frac{M}{1976}(201.09-M) \qquad (2-47)$$

式中，当$M<184.1854$时，为疾历；当$M>184.1854$时，为迟历(需以184.1854减去之)。无论在迟、疾历，$M<92.0927$，若$M>92.0927$，需以184.1854返减之。

这里还要特别指出的是：依式(2-47)计算而得的迟疾差度是指月亮实行度与月亮的平行度之差，而：

$$\text{月亮日平行度}(G)=\frac{\text{回归年长度或恒星年长度}}{\text{恒星月长度}}$$

在本文开头，已经指出中心差是指真近点角与平近点角之差，对于月亮而言：

$$\text{每日平近点角的变动值}(H)=\frac{\text{回归年长度或恒星年长度}}{\text{近点月长度}}$$

所以，依式(2-47)算得的值，与我们所说的月亮中心差是有区别的，它们之间应存在如下关系：

$$V-M=(V-M)'+\frac{M(G-H)}{G} \qquad (2-48)$$

对于木、土二星运动中心差算式，其术曰：

> 木、土二星，置其星其段入历度分(M)，如半周天(182.6282)以下者，为在盈；以上者，减去半周天，余为在缩。置盈、缩度分，如在一象(91.3141)以下者，为在初限；以上者，覆减半周天，余为在末限。置初、末限度及分于上，列半周天于下，以上减下，[余]以下乘上，木进一位，土九因之。皆满百为分，分满百为度，命曰盈缩定差($V-M$)。

依术文意，其算式应分别为：

木星：

$$V-M=M(182.6282-M)\times 10^{-3} \qquad (2-49)$$

土星：

$$V-M=9M(182.6282-M)\times10^{-4} \quad (2-50)$$

上两式中，无论在盈、缩历，$M<91.3141$，若 $M>91.3141$，需以 182.6282 返减之。

对于火星运动中心差算式，其术曰：

其火星，置盈缩度分(M)，如在初限以下者，为在初；以上者，覆减半周天，余为在末。以四十五度六十五分半为盈初、缩末限度，以一百三十六度九十六分半为缩初、盈末限度分。置初、末限度于上，盈初、缩末三因之。列二百七十三度九十三分于下，以上减下，余以下乘上，以一十二乘之，满万为度，不满，百约为分，命曰盈缩定差($V-M$)。

依其意，该算式应为：

$$V-M=12M(273.93-M)\times10^{-4} \quad (2-51)$$

上式中，对于盈初、缩末，$M<45.655$ 时，需以 3 乘之。对于缩初、盈末，$M<136.965$，若 $M>136.965$ 时，需以 182.6282 返减之，余数再乘以 3。

周琮曾明言：对于五星，“今则别立盈缩，与旧异”[①]，但现传本明天历中却不见金、水二星中心差算式的记载，这当是经文脱落所致。由已知算式看，周琮均采用了比较简明的形式，对于算式的表述则继承了曹士蔿的方式，但又较曹士蔿的表述更为完善和明确。周琮的明天历是我国古代在计算日、月、五星盈缩改正时，全面采用中心差算式的第一部历法。可惜，周琮的重要尝试未被其后大多数历法家所采用。

① 《宋史·律历志八》。

元代郭守敬等人授时历也给出月亮和五星的中心差算式，关于月亮运动迟疾改正的计算，其术曰：

置迟疾历日及分(N)，以十二限二十分乘之，在初限(84)以下为初限，以上，覆减中限(168)，余为末限。置立差三百二十五，以初末限(M_n)乘之，加平差二万八千一百，又以初末限乘之，用减定差一千一百一十一万，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即迟疾差$[(V-M)']$。①

依术文意，其算式应为：

$$(V-M)'=[11110000-(28100+325M_n)\times M_n]M_n\times 10^{-8} \quad (2-52)$$

上式中，$M_n=12.2N$(M_n 与 M 之间的关系则为：$M=\frac{13.36875}{12.2}M_n$)，当$M_n<168$时，为疾历，当$M_n>168$时，为迟疾(需以168减去之)。无论在迟、疾历，$M_n<84$，若$M_n>84$，需以168返减之。

与上述理由相同，其月亮中心差的真正算式应与式(2—48)同。

对于五星运动中心差的计算，其术曰：

置入历度及分秒(M)，在历中(182.62875)以下，为盈；以上，减去历中，余为缩。视盈缩历，在九十一度三十一分四十三秒太以下，为初限；以上，用减历中，余为末限。

其火星，盈历在六十度八十七分六十二秒半以下，

① 《元史·历志三》。

为初限；以上，用减历中，余为末限。缩历在一百二十一度七十五分二十五秒以下，为初限；以上，用减历中，余为末限。

置各星立差，以初末限乘之，去加减平差，得，又以初末限乘之，去加减定差，再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即所求盈缩差($V-M$)。[①]

依上术文，兼及五星的立、平、定三差值，则可列出五星的中心差算式。

木星：

盈缩立差二百三十六加，平差二万五千九百一十二减，定差一千八十九万七千。

$$V-M=[10897000-(25912+236M)\times M]M\times 10^{-8} \quad (2-53)$$

金星：

盈缩立差一百四十一加，平差三减，定差三百五十一万五千五百。

$$V-M=[3515500-(3+141M)M]\times M\times 10^{-8} \quad (2-54)$$

水星：

盈缩立差一百四十一加，平差二千一百六十五减，

① 《元史·历志四》。

定差三百八十七万七千。

$$V-M=[3877000-(2165+141M)M]M\times10^{-8} \quad (2-55)$$

如上三式中，当$M<182.62875$时，为盈历；当$M>182.62875$时，为缩历（需以182.62875减去之）。无论在盈、缩历，$M<91.314375$，若$M>91.314375$，需以182.62875返减之。以下式(2—56)至(2—59)中的M亦同此，只是对于盈、缩历需分别依式计算。

土星：

盈立差二百八十三加，平差四万一千二十二减，定差一千五百一十四万六千一百。缩立差，三百三十一加，平差一万五千一百二十六减，定差一千一百一万七千五百。

对于盈历：

$$V-M=[15146100-(41022+283M)\times M]M\times10^{-8} \quad (2-56)$$

对于缩历：

$$V-M=[11017500-(15126+331M)\times M]M\times10^{-8} \quad (2-57)$$

火星：

盈初缩末立差，一千一百三十五减，平差八十三万一千一百八十九减，定差八千八百四十七万八千四百。缩初盈末立差八百五十一加，平差三万二百三十五负

减，定差二千九百九十七万六千三百①。

对于盈初（$M<60.87625$）缩末（$M>121.7525$，需以182.62875返减之)时：

$$V-M=[88478400-(831189-1135M)\times M]\times M\times 10^{-8} \quad (2-58)$$

对于缩初（$M<121.7525$）盈末（$M>60.87625$，需以182.62875返减之)时：

$$\begin{aligned} V-M &=[29976300-(-30235+851M)\times M]\times M\times 10^{-8} \\ &=[29976300+(30235-851M)\times M]\times M\times 10^{-8} \end{aligned} \quad (2-59)$$

授时历是我国古代继明天历之后，全面采用中心差算式计算视太阳、月亮和五星盈缩改正值的一部历法，只是它们的形式较唐宋时期更加完善了。

第三节　交食时差算式

一、宣明历、崇玄历日食时差算式及其影响

唐代徐昂在宣明历中首创日食时差改正的公式算法，日食时差乃是由月亮视差所引致的从定朔时刻到食甚时刻的改正值。其术曰：

> 凡日食，以定朔日出入辰刻距午正刻数(K)，约百四十七，为时差。视定朔小余(I)如半法(4200)以下，以减半法，为初率；以上，减去半法，余为末率。以乘时差，如刻法(84)而一，初率以减，末率倍之，以加定朔小余，

① 《元史·历志四》。

为食定余(I'_1 或 I'_2)。月食,以定望小余为食定余。[①]

依术文意,可列出以下两式:

当 $I<4200$ 时,

$$I'_1=I-\frac{(4200-I)K}{84\times147} \qquad (2-60)$$

当 $I>4200$ 时,

$$I'_2=I+\frac{2(I-4200)K}{84\times147} \qquad (2-61)$$

上式中,K 为定朔之日太阳出入时刻与午正时刻的时距的分值(下同),该值随节气不同在 30 刻(2520 分)到 20 刻(1680 分)之间变动;I 为定朔时刻的分值(下同);$|4200-I|$ 为定朔时刻与午正时刻的时距;I'_1 为定朔在午前时的食甚时刻,I'_2 为定朔在午后时的食甚时刻(下同)。即徐昂认为从定朔到日食食甚时刻改正的绝对值在夏至时($K=2520$)为最大,在冬至时($K=1680$)最小,定朔时刻在夜半时($I=0$)最大,在午正时($I=4200$)最小。我们知道,定朔在夏至(或冬至)时,月亮的天顶距较小(或大),月亮视差所导致的时差改正绝对值应较小(或大),所以,徐昂关于 K 的影响的描述是不正确的。又,定朔时刻愈接近午正,月亮的天顶距应愈小,所以,徐昂关于 I 的影响的描述是大体正确的。

此外,由式(2—60)和式(2—61)知,徐昂认为定朔发生在午前($I<4200$)或午后($I>4200$)时,时差改正值的大小和正负都是不相同的,午前为负值、午后为正值,而且当距午正前后分相同时,午后时差改正绝对值为午前的 2 倍。我们知道,时差改正值的正负,决定于定朔时月亮在太阳之南(内道或阴历)还是之北(外道或阳历),而与午前或午后无关。时差改正值的大小则与月亮天顶距的大小成正比例,当

① 《新唐书·历志六上》。

距午正前后分相同时，时差改正值应大小相当。由此看来，徐昂的时差改正，虽然是关于月亮视差对日食发生时刻影响的认真且重要的思考，可是从总体上看，他并未给出正确的描述。

在上引文中，徐昂认为月食时定朔时刻即为月食的食甚时刻，这一点则是正确的论述。

必须指出的是，自隋代刘焯皇极历和张胄玄大业历开始，便已有关于交食时刻改正的种种方法，徐昂在前人的这类探讨的基础上，给出了如上所述的新方法。

唐末边冈在崇玄历中则给出了日食时差的新算式：

> 凡定朔约余(I)距午前、后分(J_1 和 J_2)，与五千先相减，后相乘，三万除之(即时差 Q')，午前以减，午后倍之(即时差 Q'')，以加约余，为日食定余(I'_1 或 I'_2)。①

依术文意则有：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(5000 - J_1)J_1}{30000} \qquad (2-62)$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{2(5000 - J_2)J_2}{30000} \qquad (2-63)$$

式中，$I<5000$ 分，需以 5000 返减之，为距午前分 J_1，用式(2－62)计算；$I>5000$ 分，需减去 5000 分，为距午后分 J_2，用式(2－63)计算。将此二式与式(2－60)和式(2－61)比较可见，边冈取消了 K 值对日食时差的影响，亦即不考虑因节气不同对日食时差的影响，此举虽不尽善，却避免了徐昂虑及节气不同造成的日食时差改正的负面作用。又由式(2－62)和式(2－63)知，当 J_1(或 J_2)＝0 或 5000 时，Q'和 Q''均等于 0，当 J_1(或 J_2)＝2500 时，

---

① 《新唐书·历志六下》。

Q'和Q''均达极大值。这就是说，当定朔时刻愈接近午正时，日食时差改正愈小，而当定朔发生在地平附近时，日食时差改正值较大，这同月亮视差对日食时刻影响的效应是相吻合的。而且，边冈以二次函数式表述时差在其间的变化，也颇具特色。可是，在关于时差改正值正负的判别，以及关于时差改正值午前、午后大小不同等问题上，边冈仍因循徐昂之说不改，使时差改正从总体上还处于似是而非的境地。

北宋宋行古崇天历也给出时差算式，其术曰：

> 置定朔小余(I,1 刻＝105.9 分)，如半法(5295)以下覆(加)[减]半法，余为午前分(J_1)；以上，减去半法，余为午后分(J_2)。置午前、后分于上，列半法于下，以上减下，以下乘上，午前以三万一千七百七十除，午后以一万(三)[五]千八百八十五除之，各为时差(Q'或Q'')。午前以减、午后以加定朔小余，各为食定小余(I'_1 或 I'_2)。①

依此可列出下式：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(5295 - J_1)J_1}{31770} \qquad (2-64)$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{(5295 - J_2)J_2}{15885} \qquad (2-65)$$

式中，若 $I<5295$，需以 5295 返减之，得 J_1，用式(2－64)；若 $I>5295$，需以 5295 减去之，得 J_2，用式(2－65)。将式(2－64)和式(2－65)分别与式(2－62)和式(2－63)比较，$\frac{5295}{31770}=\frac{5000}{30000}$。又，时差改正绝对值大小午后亦为午前的 2 倍，也以距午前、后作

① 《宋史・律历志六》。

为判别时差改正值正、负的标准，故该二式实即式(2－62)和式(2－63)的翻版。31770 之半为 15885，所以，上术文中“三”应为“五”之误。

北宋皇居卿亦有时差算式，其术文为：

> 置定朔小余(I，1 刻＝120.3 分)，如半统法(6015)以下，[覆减半统法](J_1)，与半统法相减相乘，如三万六千九十而一，为时差(Q')，以减；如半统法以上，减去半统法(J_2)，余亦与半统法相减相乘，如一万八千四十五而一，为时差(Q'')。午前以减，午后以加。皆加减定朔小余，为日食甚小余(I'_1 或 I'_2)。①

依之可得：

$$I'_1=I-Q'=I-\frac{(6015-J_1)J_1}{36090} \qquad (2-66)$$

$$I'_2=I+Q''=I+\frac{(6015-J_2)J_2}{18045} \qquad (2-67)$$

式中，若 $I<6015$，需以 6015 返减之，得 J_1，用式(2－66)；若 $I>6015$，需减去 6015，得 J_2，用式(2－67)。同理可证该二式亦为式(2－62)和式(2－63)的翻版。

二、纪元历及其后诸历法的交食时差算式

北宋姚舜辅日食时差算式的术文是：

> 视泛余(I，1 刻＝72.9 分)，如半法(3645)以下，[用减半法]，为中前(J_1)；列半法于下，以上减下，余以乘

① 《宋史·律历志十一》。

上，如一万九百三十五而一，所得，为差(Q')，以减泛余，为食甚定余(I'')，用减半法，为午前分(J'_1)；如泛余在半法以上，减去半法，为中后(J_2)，列半法于下，以上减下，余以乘上，如日法(7290)而一，所得，为差(Q'')，以加泛余，为食甚定余(I'_2)，乃减去半法，为午后分(J'_2)。①

依之可得：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(3645 - J_1)J_1}{10935} \quad (2-68)$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{(3645 - J_2)J_2}{7290} \quad (2-69)$$

$$J'_1 = 3645 - I'_1$$

$$J'_2 = I'_2 - 3645$$

式中，若 $I<3645$，需以 3645 返减之，得 J_1，用式(2－68)计算；若 $I>3645$，需减去 3645，得 J_2，用式(2－69)计算。J'_1 和 J'_2 分别为食甚时刻距午正前、后刻分值(下同)。将式(2－68)、式(2－69)和式(2－62)、式(2－63)相比较可知，$\frac{3645}{10935}=\frac{5000}{30000}\times 2$，$\frac{3645}{7290}=\frac{5000}{30000}\times 3$，则可见式(2－68)和式(2－69)也受边冈时差算式的影响，只是姚舜辅认为，当定朔距午前、后分相同时，时差改正绝对值午后为午前的 1.5 倍，而不是边冈等人所认定的 2 倍。这一修正仅是小补而已，并未真正改变自徐昂、边冈以来对于时差改正概念模糊以致不正确的问题。

边冈、宋行古、皇居卿等人与徐昂一样也都以为定望时刻即

① 《宋史·律历志十三》。

月食食甚时刻，而姚舜辅不以为然，在纪元历中，他还给出了所谓月食时差的算式，其术文曰：

> 月食者，视泛余(I_3，1刻＝72.9分)，如半法(3645)以上，减去半法，余(J_3)在一千八百二十二半以下，自相乘；以上者，覆减半法，余(J_3)亦自相乘，如三万而一，所得(Q_3)，以减泛余，为食甚定余(I'_3)。如泛余不满半法，在日出分(K_1)三分之二已下(J'_3)，列于上位；已上者，用减日出分，余(J''_3)倍之，亦列于上位，乃四因三约日出分，列之于下，以上减下，余以乘上，如一万五千而一，所得(Q'_3或Q''_3)，以加泛余，为食甚定余(I''_3或I'''_3)。[①]

依之可得：

当$I_3>3645$时，需以3645减去之，所得若小于1822.5，即为J_3；所得若大于1822.5，还需以3645返减之，得J_3，

$$I'_3=I_3-Q_3=I_3-\frac{J_3^2}{30000} \tag{2-70}$$

当$I_3<\frac{2}{3}K_1$时，即为J'_3，

$$I''_3=I_3+Q'_3=I_3+\frac{(\frac{4}{3}K_1-J'_3)J'_3}{15000} \tag{2-71}$$

当$3645>I_3>\frac{2}{3}K_1$时，需以K_1返减之，得J''_3，

$$I'''_3=I_3+Q''_3=I_3+\frac{(\frac{4}{3}K_1-2J''_3)2J''_3}{15000} \tag{2-72}$$

① 《宋史·律历志十三》。

式中，I_3 为定望时刻的分值；K_1 为定望之日太阳出地平时刻的分值；I'_3 为定望发生在午后时的月食食甚时刻；I''_3 为定望发生在小于$\frac{2}{3}K_1$ 时的月食食甚时刻；I'''_3 为定望发生在大于$\frac{2}{3}K_1$ 与午正前之间时的月食食甚时刻；J_3 为定望距午正后或子夜前的刻分值；J'_3 为定望距子夜后的刻分值（即定望刻分值）；J''_3 为定望距日出时刻前、后的刻分值。由此看来，姚舜辅把月食时差的大小、正负同这些庞杂的量值相联系，实无明确的天文学意义可言。

南宋诸历法均沿用姚舜辅的日、月食时差计算法。

关于时差，金代赵知微重修大明历亦分别给出适用于日食和月食的算式。其日食时差的术文为：

> 视泛余（I，1 刻＝52.3 分），如半法（2615）以下，[覆减半法]，为中前分（J_1）；半法以上，去半法，为中后分（J_2）。取中前、后分，与半法相减相乘，倍之，万约为分，曰时差（Q）。中前，以时差减泛余为定余（I'_1），覆减半法，余为午前分（J'_1）。中后，以时差加泛余为定余（I'_2），减去半法，为午后分（J'_2）。①

依此，可列出下式：

$$I'_1 = I - Q = I - \frac{(2615 - J_1)J_1}{5000} \quad (2-73)$$

$$I'_2 = I + Q = I + \frac{(2615 - J_2)J_2}{5000} \quad (2-74)$$

$$J'_1 = 2615 - I'_1$$

---

① 《金史·历志下》。

$$J'_2 = I'_2 - 2615$$

式中，若 $I<2615$，需以 2615 返减之，得 J_1；若 $I>2615$，需减去 2615，得 J_2。式(2－73)和式(2－74)的函数形式显然也受到边冈相应算式的影响，但赵知微认为当定朔距午正前、后分值相等时，日食时差的改正值大小是相同的，这才纠正了徐昂以来认为其时日食时差改正值午后是午前的 2 倍或 1.5 倍的不正确见解。可是，赵知微也认为日食时差改正值午前为负，午后为正，这依然是似是而非的。

重修大明历月食时差算式的术文曰：

> 视泛余(I_3，1 刻＝52.3 分)，在日入后，夜半前者，如日法(5230)四分之三(3922.5)以下，减去半法(2615)，为酉前分(J_4)，四分之三以上，覆减日法，余为酉后分(J_5)。又视泛余在夜半后、日出前者，如日法四分之一(1307.5)以下，为卯前分(J_6)，四分之一以上，覆减半法，余为卯后分(J_7)，其卯、酉前、后分，自相乘，四因，退位，万约为分(Q_3)，以加泛余为定余(I'_3)。①

依术文意可得：

$$I'_3 = I_3 + Q_3 = I_3 + \frac{4J_4^2(\text{或 } J_5^2 \text{ 或 } J_6^2 \text{ 或 } J_7^2)}{100000} \qquad (2-75)$$

式中，I_3 为定望时刻的分值；Q_3 为月食时差改正值；I'_3 为月食定望时刻。当 $2615<I_3<3922.5$ 时，需减去 2615，得 J_4，称酉前分，实指距午正后分；当 $I_3>3922.5$ 时，需以 5230 返减之，得 J_5，称酉后分，实指距子夜前分；当 $I_3<1307.5$ 时，即为 J_6，称卯前分，实指距子夜后分，亦即定望时刻；当 $1307.5<I_3<2615$ 时，

① 《金史·历志下》。

需以 2615 返减之，得 J_7，称卯后分，实指距午正前分。式(2−75)与姚舜辅算式显然不同，式中 J_4、J_5、J_6 和 J_7 的含义与姚舜辅算式有同有异，多少受到姚舜辅的影响。

元代耶律楚材庚午历取用赵知微的以上算式。

郭守敬等人的授时历给出的日食时差算式的术文曰：

> 视定朔分（I，1 刻＝10000 分），在半日周（5000）以下，覆减半周，为中前（J_1）；以上，减去半周，为中后（J_2）。与半周相减、相乘，退二位，如九十六而一，为时差（Q），中前以减，中后以加，皆加减定朔分，为食甚定分（I'_1 或 I'_2）。以中前、后分各加时差，为距午定分（J'_1 或 J'_2）。[1]

依之可得：

$$I'_1=I-Q=I-\frac{(5000-J_1)J_1}{9600} \qquad (2-76)$$

$$I'_2=I+Q=I+\frac{(5000-J_2)J_2}{9600} \qquad (2-77)$$

$$J'_1=5000-I'_1$$

$$J'_2=I'_2-5000$$

式中各值的含义以及算式的形式与赵知微算式全同，又 $\frac{5000}{9600}\approx\frac{2604}{5000}$，可见郭守敬日食时差算式只是在赵知微算式的基础上对数量小做修改，并无本质的差异。

授时历月食时差算式术曰：

---

① 《元史·历志四》。

视定望分(I_3)在日周四分之一(2500)以下,为卯前(J_6);以上,覆减半周(5000),为卯后(J_7);在四分之三(7500)以下,减去半周,为酉前(J_4);以上,覆减日周(10000),为酉后(J_5)。以卯、酉前、后分自乘,退二位,如四百七十八而一,为时差(Q)。子前以减,子后以加,皆加减定望分,为食甚定分(I'_3 或 I''_3)。[①]

依术文意可列出下式:

$$I'_3 = I_3 - Q_3 = I_3 - \frac{J_4^2 \text{ 或 } J_5^2}{47800} \quad (2-78)$$

$$I''_3 = I_3 + Q_3 = I_3 + \frac{J_6^2 \text{ 或 } J_7^2}{47800} \quad (2-79)$$

式中 I'_3 和 I''_3 分别为定望刻分值小于或大于 5000 时的月食食甚刻分值。其他各值的含义均与式(2－75)相同。式(2－78)和式(2－79)与式(2－75)的函数形式亦同,两者的主要差别是郭守敬以定望发生在子夜前或后判别月食时差值的正负。

综上所述,日食时差算式系由唐代徐昂所创,其算式对后世历法产生很大影响。而唐末边冈以先相减、后相乘法给出日食时差新算式,并摒弃徐昂引入的、起反作用的节气不同对日食时差改正的影响后,更为后世绝大多数历法所承用,其影响更为深远。徐昂、边冈、宋行古、皇居卿等人的日食时差算式均以为当定朔距午前、后分相同时,午后时差改正绝对值为午前的 2 倍。定朔距午前、后分相同,是说其时月亮的天顶距大体相同。日食时差是月亮视差造成的,而月亮视差的大小决定于月亮天顶距的大小,即当月亮天顶距相同时,日食时差的大小亦应相同。所以,徐昂

① 《元史·历志四》。

等人的上述描述是不正确的。而北宋周琮明天历以为日食时差等于0,自然也是不正确的。姚舜辅日食时差算式将徐昂等人所说的2倍修正为1.5倍,虽有所改良,但也不确当。直到赵知微和郭守敬等人,日食时差算式才调整到正确的状态上。而所有这些历法都以定朔发生在午前或午后判别日食时差改正值为正或为负,这使日食时差改正的后果处于一种含糊不清的,偶或有益,偶或有害的状况。

关于月食时差,徐昂、边冈、宋行古、周琮和皇居卿等人都认为应等于0,这应是正确的。但从姚舜辅到郭守敬等人均给出月食时差算式,由这些算式看,月食时差并无明确的天文学依据,这大约是姚舜辅等人的误解所致。

第四节　黄赤道、黄白道和赤白道度差算式

一、黄赤道度差算式

最早给出特定算式以计算黄赤道度差者,是唐末的边冈,他在崇玄历中,是这样描述这一算式的:

> 凡冬至赤道日度及约余(C),以减其宿全度,乃累加次宿皆为距后积度,满限九十一度三十一分三十七小分去之,余,半以下为初,以上以减限为末,皆百四十四乘之,退一等,以减千三百一十五,所得以乘初末度分为差;又通初末度分与四千五百六十六先相减后相乘,千六百九十除之,以减差为定差,再退为分,至后以减,分后以加距后积度为黄道积度,宿次相减,即其度也,以冬

至赤道日度及约余，依前求定差减之为黄道日度(F)。[1]

依此，该算式可列于下：

$$F-C=\frac{1}{10000}\left[\left(1315-\frac{144}{10}C\right)\cdot C-\frac{C}{1696}(4566-C)\right] \tag{2-80}$$

式中 C 为从冬至点起算的赤道度，F 为与之相应的黄道度(下同)。$C<45.65685$，若 $C>45.65685$，需以 91.3137 返减之。若 $C>182.6274$，需以 182.6274 减去之，若 $C>91.3137$，需以 182.6274 返减之。

式(2—80)由先相减、后相乘法构造的两个函数之差组成，其实质也就是先相减、后相乘法的应用，只是在表达形式上小有不同而已。虽然式(2—80)尚显繁杂，但边冈率先开拓此法于黄赤道度差的计算，是功不可没的。

北宋宋行古在崇天历中也给出了黄赤道度差算式，其术曰：

> 各置赤道宿入初、末限度及分(C)，用减一百二十五，余以初、末限度及分乘之，十二除为分，分满百为度，命曰黄赤道差及分(F—C)。[2]

由此可得：

$$F-C=\frac{C}{1200}(125-C) \tag{2-81}$$

式中，C 为从二至起算的赤道度(下同)，$C<45.66$，若 $C>45.66$，需以 91.31 返减之。若 $C>91.31$，需以 182.62 返减之。

① 《新唐书·历志六下》。

② 《宋史·律历志五》。

这是一个十分简明的算式。严敦杰指出，式(2－81)是以唐代一行大衍历的黄赤道度变换法为依据设定的[①]。因为式(2－81)又可表达为：

$$F-C=\frac{C}{5}\left[\frac{12}{24}+\frac{\frac{C}{5}-1}{2}\left(-\frac{1}{24}\right)\right] \qquad (2-82)$$

式(2－81)正与本书第一章第八节中提及的大衍历黄赤道度变换法基本吻合，两者的差异仅在于，大衍历以 $C=45$ 为限，而宋行古令 $C=45.66$ 为限。

北宋周琮明天历所给黄赤道度差算式表述为：

> 各置赤道宿入初、末限度及分(C)，用减一百一十一度三十七分，余以乘初、末限度及分，进一位，以一万约之，所得，命曰黄赤道差及分($F-C$)。[②]

其算式即为：

$$F-C=\frac{10C}{10000}(111.37-C) \qquad (2-83)$$

式中，$C<45.655$，若 $C>45.655$，需以 91.31 返减之。若 $C>91.31$，需以 182.62 返减之。

北宋皇居卿观天历用以下术文表述其黄赤道度差算式：

> 各置赤道宿入初、末限度及分(C)，三之，为限分，用减四百，余以限分乘之，一万二千而一为度，命曰黄赤道差($F-C$)。[③]

---

① 严敦杰:《中国古代的黄赤道差计算法》,《科学史集刊》,1958 年,第 1 期。

② 《宋史・律历志七》。

③ 《宋史・律历志十》。

这就是：

$$F-C=\frac{3C}{12000}(400-3C) \qquad (2-84)$$

式中，$C<45.65545$，若 $C>45.65545$，需以 91.3109 返减之。若 $C>91.3109$，需以 182.6218 返减之。

北宋姚舜辅纪元历也给出黄赤道度差算式，其术曰：

> 以冬至加时赤道日度及分秒(C)，减一百一度，余以冬至加时赤道日度及分秒乘之，进位，满百为分，分满百为度，命曰黄赤道差($F-C$)。[1]

依之可得：

$$F-C=\frac{10C}{10000}(101-C) \qquad (2-85)$$

式中 C 值的界定与式(2-84)相同。这是已知赤道度求黄赤道度差。姚舜辅还不止于此，在纪元历中他还给出已知黄道度返求相应的赤道度的算式，其术曰：

> 以所求日午中黄道积度(F)，入至后初限、分后末限度及分秒(43.1287)，进三位，加二十万二千五十少，开平方除之，所得，减去四百四十九半，余(H_1)在初限者，直以二至赤道日度($C_{至}$)加而命之；在末限者，以减象限，余以二分赤道日度($C_{分}$)加而命之，即每日午中赤道日度(C)。以所求日午中黄道积度(F)，入至后末限、分后初限度及分秒(48.2822)，进三位，用减三十万三千五十少，

① 《宋史·律历志十二》。

开平方除之，所得，以减五百五十半，余(H_2)在初限者，直以二分赤道日度加而命之；在末限者，以减象限，余以二至赤道日度加而命之，即每日午中赤道日度(C)。①

依术文意可列出以下诸式：

当 $F<43.1287$，又当 $H_1<43.1287$ 时，

$$C=C_{至}+H_1=C_{至}+\sqrt{1000F+202050.25}-449.5 \tag{2-86}$$

当 $F>91.3109$ 时，需先以 91.3109 返减之，所得 $F>43.1287$时，还需以 91.3109 返减之，又当 $H_1>48.2822$ 时，

$$\begin{aligned} C &= C_{分}+91.3109-H_1 \\ &= C_{分}-\sqrt{1000F+202050.25}+540.8109 \end{aligned} \tag{2-87}$$

当 $F>91.3109$ 时，需先以 91.3109 返减之，所得 $F<43.1287$，又当 $H_2<48.2822$时，

$$\begin{aligned} C &= C_{分}+H_2 \\ &= C_{分}-\sqrt{303050.25-1000F}+550.5 \end{aligned} \tag{2-88}$$

当 $F>43.1287$ 时，需以 91.3109 返减之，又当 $H_2>43.1287$时，

$$\begin{aligned} C &= C_{至}+91.3109-H_2 \\ &= C_{至}+\sqrt{303050.25-1000F}-459.1891 \end{aligned} \tag{2-89}$$

上诸式中 $C_{至}$、$C_{分}$ 分别指自二至或二分起算的赤道日度值。

周琮、皇居卿和姚舜辅的黄赤道度差算式也具有简明的特点，它们与边冈、宋行古的黄赤道度差算式同属于先相减、后相乘

① 《宋史·律历志十二》。

法的类型。

令 $C=5$、10、15、20、25、30、35、40、45 分别代入式(2－80)、式(2－81)、式(2－83)、式(2－84)和式(2－85)，算得诸 $F-C$ 值，并与相应的 $F-C$ 的理论值比较，可知边冈、宋行古、周琮、皇居卿四家算式的平均误差均为 0.05 度，均仅与一行大衍历黄赤道度差变换法算得的 $F-C$ 值的精度持平。而姚舜辅算式的平均误差为 0.026 度，精度较前四历家算式有较大提高。姚舜辅算式为南宋诸历法，以及金代赵知微重修大明历和元代耶律楚材庚午历沿用不弃，其影响是巨大的。

在元代郭守敬等人的授时历中，列有"黄赤道率"[①]表，备载从冬夏至或春秋分以后每经 1 度(从 0 度至 91 度)黄赤道度差的数值。授时历经中对于"黄赤道率"表如何推算而得未作记载。据研究[②]，它们是王恂、郭守敬等人大体上应用北宋沈括的弧矢割圆法的公式推求而得的。看来，授时历亦采用公式算法以计算黄赤道度差，只是其算式与前述边冈等人的算式属于不同的类型。由"黄赤道率"表中 $C=5$、10、15、20、25、30、35、40、45 时的 $F-C$ 值，与理论值比较，可得平均误差为 0.027 度，精度仅与姚舜辅算式相当。这是因为沈括公式还只是近似公式，故在精度上未能获得理想的结果。

二、黄白道和赤白道度差算式

黄白道度差和赤白道度差算式，系由北宋宋行古所首创，在崇天历中，他给出了以下术文：

各视月所入正交积度(F_3)，满象度及分(90.94 度)

① 《元史・历志三》。

② 严敦杰：《中国古代的黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958 年，第 1 期。

去之，若在半象(45.47度)以下者为入初限；以上者，覆减象度，余为入末限，用减一百二十五，余以所入初、末限度及分乘之，满二十四而一为分，分满百为度，所得，为月行与黄道差数(S_3-F_3)。距半交后、正交前，以差数为减；距正交后、半交前，以差数为加。计去冬、夏至以来度数(F_4)，乘黄道所差，九十而一，为月行与赤道差数(S_3-C_0)。①

依术文意，可列出以下算式：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2400}(125-F_3) \qquad (2-90)$$

$$S_3-C_0=\frac{F_3F_4}{2400\times 90}(125-F_3) \qquad (2-91)$$

式中，F_3 为月亮与黄白交点间的黄道度，S_3 和 C_0 分别为与之相应的白道度和赤道度，F_4 为黄白交点与二至点的黄道度(下同)。$F_3<45.47$，若 $F_3>45.47$，需以90.94返减之。若将式(2—90)与式(2—81)比较可知，$F_3-S_3=\frac{1}{2}(F-C)$，即黄白道度差是为黄赤道度差的一半。F_4 在0度到182度间变动，则式(2—91)同我们在第一章第八节中已经提及的一行大衍历赤白道度差与黄白道度差之间的关系式是相类似的。

北宋周琮明天历也给出黄白道度差和赤白道度差的算式，其术文曰：

> 各视月所入正交积度(F_3)，满象度及分(90.92度)去之，余者若在半象(45.46度)以下为在初限；以上，覆

①《宋史·律历志五》。

减象度及分，为在末限。用减一百一十一度三十七分，余以所入初、末限度及分乘之，退位，半之，满百为度，不满为分，所得，为月行与黄道差数（F_3-S_3）。距半交后、正交前，以差数减；距正交后、半交前，以差加。计去二至以来度数（F_4），乘黄道所差，九十而一，为月行与黄（赤）道差数（S_3-C_0）。①

依此则有：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2000}(111.37-F_3) \quad (2-92)$$

$$S_3-C_0=\frac{F_3F_4}{2000\times 90}(111.37-F_3) \quad (2-93)$$

式中 $F_3<45.46$，若 $F_3>45.46$，需以 90.92 返减之。若将式（2—92）与式（2—83）比较，亦可得上述对崇天历同类算式的分析所得的结论。

北宋皇居卿观天历关于黄白道度差和赤白道度差算式的术文与前二历十分相似：

各视月行所入正交积度（F_3），满交象（90.94 度）去之，若在半交象（45.47 度）以下为初限；以上，覆减交象，余为末限。置初、末限度及分，三之，为限分，用减四百，余以限分乘之，二万四（十）[千]而一为度，命曰月道与黄道差数（F_3-S_3）。距正交后、半交前，以差数加；距半交后、正交前，以差数减。仍计去冬、夏二至已来度数（F_4），乘差数，如九十而一，为月道与赤道差数（S_3-C_0）。②

① 《宋史・律历志八》。

② 《宋史・律历志十》。

依之可得：

$$F_3-S_3=\frac{3F_3}{24000}(400-3F_3) \quad (2-94)$$

$$S_3-C_0=\frac{3F_3F_4}{24000\times90}(400-3F_3) \quad (2-95)$$

式中各值的含义和界定均与崇天历算式相同，而且也具有如同上述对崇天历算式的分析所得知的特征［令式(2－94)与式(2－84)相比较］。

北宋姚舜辅纪元历的黄白道度差算式的术文曰：

各置黄道宿度及分秒（F_3），满交象度及分(90.9486度)去之，在半交象(45.4748度)以下为初限；以上，以减交象度，余为入末限。各以所入初、末限度及分，减一百一度，余以所入初、末限度及分乘之，半而退位为分，分满百为度，命为月道与黄道泛差(F_3-S_3)。①

依此可列出下式：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2000}(101-F_3) \quad (2-96)$$

式中 $F_3<45.4748$，若 $F_3>45.4748$，需以 90.9486 返减之，若将式(2－96)和式(2－85)比较，亦可知纪元历黄白道度差是为黄赤道度差的一半。

纪元历的赤白道度差算式与前述三历小有变化，其术曰：②

① 《宋史・律历志十二》。

② 《宋史・律历志十二》。

凡日以赤道内为阴、外为阳；月以黄道内为阴、外为阳。故月行正交，入夏至后宿度内为同名，入冬至后宿度内为异名。

其在同名者，置月行与黄道泛差(F_3-S_3)，九因八约之，为定差(N_1)，半交后、正交前以差减；正交后、半交前以差加。仍以正交度距秋分度数(F_5)乘定差，如象限(90.9486度)而一，所得，为月道与赤道定差(S_3-C_0)，前加者为减，减者为加。

其在异名者，置月行与黄道泛差(F_3-S_3)，七因八约之，为定差(N_2)；半交后、正交前以差加，正交后、半交前以差减，仍以正交度距春分度数(F_6)乘定差，如象限而一，所得，为月行与赤道定差(S_3-C_0)，前加者为减，减者为加。

依术文意，可得：

当日在赤道内、月在黄道内，或日在赤道外、月在黄道外，即所谓同名时，

$$N_1=\frac{9}{8}(F_3-S_3)$$

$$S_3-C_0=\frac{N_1F_5}{90.9486}=\frac{9F_5F_3(101-F_3)}{8\times90.9486\times2000} \qquad (2-97)$$

当日在赤道内、月在黄道外，或日在赤道外、月在黄道内，即所谓异名时，

$$N_2=\frac{7}{8}(F_3-S_3)$$

$$S_3-C_0=\frac{N_2F_6}{90.9486}=\frac{7F_6F_3(101-F_3)}{8\times90.9486\times2000} \qquad (2-98)$$

式中，F_3、S_3、C_0 的含义同式(2－91)所示。F_5 和 F_6 分别为黄白交点距秋分或春分点的黄道度。若将式(2－97)和式(2－98)同式(2－91)等比较可知，姚舜辅赤白道度差算式是在宋行古等人相关算式的基础上，有所改进。同名时，赤白交角等于黄赤交角加上黄白交角，而异名时，赤道交角则等于黄赤交角减去黄白交角，故在同名时，赤白道度差理应大于在异名之时，姚舜辅以上述两算式分别计算赤白道度差，正反映了这种状况。

姚舜辅的黄白道度差和赤白道度差算式均为南宋各历法，以及金代赵知微重修大明历和元代耶律楚材庚午历沿用不弃，可见其影响之深远。

纵观上述各历法的黄白道度差和赤白道度差算式，无不采用先相减、后相乘法，此为宋行古在崇天历中所创用，其后各历法只是在系数设定上有所不同，这些系数的设定则与各历法黄赤道度差算式有关，即取其半为是。而关于赤白道度差的计算，上述各历法(除纪元历外)则深受一行大衍历的影响。

元代郭守敬等人授时历则给出了黄道、赤道、白道度间彼此转换的算式，其术依次为：①

> 置初、末限度(W_1)，以十四度六十六分乘之，如象限(91.314375)而一，为定差……以二十四乘定差，如十四度六十六分而一，所得，交在冬至后名减，夏至后名加，皆加减九十八度，为定限度及分秒(V_1)。

依之可得：

① 《元史·历志三》。

$$V_1=98\pm\frac{24W_1}{91.314375} \qquad (2-99)$$

式中，W_1 为黄白交点同冬至点间的黄道宿度，当 $W_1<182.62135$时，为冬至后；$W_1>182.62135$ 时，需减去 182.62135，余为夏至后。又，$W_1<91.314375$ 为在初限，若 $W_1>91.314375$，需减去 91.314375，余为入末限。

又术曰：

置定限度(V_1)，与初、末限(W_1)相减、相乘，退位为分，为定差，以差加减正交后赤道积度(C_0)，为月离白道定积度(S_3)。

依此则有：

$$S_3=C_0\pm\frac{1}{1000}(W_1-V_1)V_1 \qquad (2-100)$$

式中，S_3 为月亮距黄白交点的白道度；C_0 为月亮距黄白交点的赤道度，可由授时历"黄赤道率"表求得。而 W_1、V_1 的含义同式(2－99)。

第五节　太阳视赤纬算式

一、崇玄历太阳视赤纬算式及其影响

最先给出太阳视赤纬算式的，也是唐末的边冈。在崇玄历中，边冈给出了如下的术文：

又计二至加时已来至其日昏后夜半日数及余(n)。冬至后为息，夏至后为消。如一象(91.3131)以下，为

初；以上，返减二至限(182.6262)，余为末。令自相乘，进二位，以消息法(1667.5)除为分，副之。与五百先相减后相乘，千八百而一，以加副，为消息数。以象积(480)乘之，百约为分，再退为度(g_1)。春分后，以加六十七度四十分；秋分后，以减百一十五度二十分，即各其日黄道去极(f)。①

据术文，可列出如下算式：

$$g_1=\left[\frac{100n^2}{1667.5}+\frac{\left(500-\frac{100n^2}{1667.5}\right)\left(\frac{100n^2}{1667.5}\right)}{1800}\right]\times\frac{480}{10000}$$

$$=\frac{184}{50025}n^2-\frac{16}{50025\times3335}n^4$$

式中，$n\leqslant91.3131$，若 $n>91.3131$，需以 182.6262 返减之。此处的 n 是指二至以后的太阳实行度(距二至的黄道度，下同)。

对于春分后的时日(当日夜半时)，

$$f=67.40+g_1$$

则

$$\delta=23.9141-g_1 \qquad (2-101)$$

对于秋分后的时日(当日夜半时)，

$$f=115.20-g_1$$

则

$$\delta=-23.8859+g_1 \qquad (2-102)$$

这里边冈所给出的算式是一个包括常数项、二次项和四次项的高次函数式，显然与前述的先相减、后相乘法不同。在术文中，边冈引进了令 n“自相乘”的量值，而且又应用了先相减、后相乘

① 《新唐书·历志六下》。

法，所以，不妨称之为自相乘、先相减、后相乘法，是边冈的创新之法，它是一个包含二次和四次项的函数式。

北宋史序在仪天历中所给出的太阳视赤纬的算法是：[①]

> 求每日晷漏损益数：置入前后限损益日数及分(a)，如初象以下为在上限；以上者，返减前限(182.622275)，余为下限。皆自相乘之，其分半以下乘，半以上收之；以一百通日，内其分，乃乘之；所得，在冬至后初象、夏至后次象(88.8811)，以升法(156428)除之；若冬至后次象、夏至后初象(93.7412)，以平法(174003)除之，皆为分，不满，退除为小分；所得，置于上位，又别置五百五分于下，以上减下，[余]以[下]乘上；用在升法者，以二千八百五十除之；用在平法者，以五千五百五十二除之，皆为分，不满，退除为小分，所得，以加上位，为其日损益数(g_2 和 g_3)。

依此，可列出如下公式：

对于冬至后初象、夏至后次象，

$$g_2=\frac{10000a^2}{156428}+\frac{\left(505-\frac{10000a^2}{156428}\right)\left(\frac{10000a^2}{156428}\right)}{2850}$$

$$=\frac{167750}{2229099}a^2-\frac{125000}{2229099\times39107}a^4$$

式中，$a\leqslant88.8811$，若 $a>88.8811$，需以 182.622275 返减之。

对于冬至后次象、夏至后初象，

① 《宋史·律历志二》。

$$g_3 = \frac{10000a^2}{174003} + \frac{\left(505 - \frac{10000a^2}{174003}\right)\left(\frac{10000a^2}{174003}\right)}{5552}$$

$$= \frac{1261875}{20126347}a^2 - \frac{6250000}{20126347 \times 522009}a^4$$

式中，$a \leqslant 93.7412$，若 $a > 93.7412$，需以 182.622275 返减之。在求得 g_2、g_3 后，欲求每日黄道去极度，其术曰：

若春分后，置损益差，以五十乘之，以一千五十二除之为度，不满，以一千四十二除之为分，以加六十七度三千八百四十五。若秋分后，置损益差，以五十乘之，以一千六十二除之为度，不满，以一千五十退除为分，以减一百一十五度二千二百二十二分，即得黄道去极度(f)。

对于春分后的时日，

$$f = 67.3845 + \frac{50}{1052}g_2（或\ g_3）$$

则

$$\delta = 23.9296 - \frac{50}{1052}g_2（或\ g_3） \qquad (2-103)$$

对于秋分后的时日，

$$f = 115.2222 + \frac{50}{1062}g_3（或\ g_2）$$

则

$$\delta = -23.9081 + \frac{50}{1062}g_3（或\ g_2） \qquad (2-104)$$

式(2－103)和式(2－104)所示的函数形式与式(2－101)和式(2－102)是相同的，当然它们的常数项及二次项、四次项的系数是各异的。另外，史序所取 a 值是指所求日与冬、夏至时刻间

的时距，而不是指这一时段内太阳的实行度数，这与边冈所取 n 值的含义是完全不一样的。应该说史序算式是在边冈法的基础上衍生出来的，但不是简单的承袭，而是有所变化，它也不失为一种新的尝试。唯其算式反而显得繁杂，这是它不为后世历家所采纳的原因之一。自崇天历以后的诸家历法均继承边冈法，均取太阳的实行度作为引数。

北宋崇天历求太阳视赤纬的算式，宋行古是这样表述的：

> 求每日消息定数：以所入气日及加其气下中积(n)，一象(91.31)以下，自相乘；以上者，用减二至限(182.62)，余亦自相乘，皆五因之，进二位，以消息法(7873)除之，为消息常数。副置常数，用减五百二十九半，余乘其副，以二千三百五十除之，加于常数，为消息定数。
>
> 置其消息数，十六乘之，以三百五十三除为度(g_4)，不满，退除为分。所得，在春分后加六十七度三十一分，秋分后减一百一十五度三十一分，即每日黄道去极度及分(f)。①

依术文可知：

$$g_4=\left[\frac{500n^2}{7873}+\frac{\left(529.5-\frac{500n^2}{7873}\left(\frac{500n^2}{7873}\right)\right)}{2350}\right]\times\frac{16}{353}$$

$$=\frac{460720}{130620943}n^2-\frac{80000}{130620943\times7873}n^4$$

式中，$n\leqslant 91.31$，若 $n>91.31$，需以 182.62 返减之。下面 g_5、g_6 的 n 值亦如此。

对于春分后的时日，

---

① 《宋史・律历志五》。

$$f=67.31+g_4$$

则

$$\delta=24.0041-g_4 \qquad (2-105)$$

对于秋分后的时日，

$$f=115.31-g_4$$

则

$$\delta=-23.9959-g_4 \qquad (2-106)$$

北宋周琮明天历的相应算法为：

求每日消息定数：置所求日中日度分(n)，如去二至限(182.62)以下者为在息，以上者去之，余为在消。又视入消息度，如一象(91.31)以下者为在初；以上者，覆减二至限，余为在末。其初、末度自相乘，以一万乘而再折之，满消息法(10689)除之，为常数。乃副之，用减一千九百五十，余以乘副，满八千六百五十除之，所得，以加常数，为所求消息定数。

置其日消息定数，以四因之，满三百二十五除之为度(g_5)，不满，退除为分，所得，在春分后，加六十七度三十一分；在秋分后，减一百一十五度三十一分，即为所求日黄道去极度及分(f)。①

据此，可列出如下算式：

$$g_5=\left[\frac{10000n^2}{4\times10689}+\frac{\left(1950-\frac{10000n^2}{4\times10689}\right)\left(\frac{10000n^2}{4\times10689}\right)}{8650}\right]\times\frac{4}{325}$$

$$=\frac{84800}{24039561}n^2-\frac{20000}{24039561\times10689}n^4$$

① 《宋史·律历志八》。

对于春分后的时日(当天中午时),

$$f=67.31+g_5$$

则

$$\delta=24.0041-g_5 \tag{2—107}$$

对于秋分后的时日(当天中午时),

$$f=115.31-g_5$$

则 $\delta=-23.9959+g_5$ (2—108)

北宋皇居卿观天历的相应算式亦大同小异,其术曰:

求每日午中消息定数:置定积日及分(n),在一象(91.31)以下自相乘,以上,用减二至限(182.62),余亦自相乘,七因,进二位,以消息法(9703)除之,为消息常数,副置之,用减六百一半,余以乘其副,以二千六百七十除之,以加常数,为消息定数。又,置其日消息定数,十六乘之,满四百一除之为度(g_6),不满,退除为分。春分后,加六十七度三十一分;秋分后,减一百一十五度三十一分,即每日午中黄道去极度及分(f)。[①]

依此可知其算式应为:

$$g_6=\left[\frac{700n^2}{9703}+\frac{\left(601.5-\frac{700n^2}{9703}\right)\left(\frac{700n^2}{9703}\right)}{2670}\right]\times\frac{16}{401}$$

$$=\frac{1221360}{346290367}n^2-\frac{784000}{346290367\times 29109}n^4$$

对于春分后的时日(当天中午时),

$$f=67.31+g_6$$

① 《宋史·律历志十》。

则

$$\delta = 24.0041 - g_6 \qquad (2-109)$$

对于秋分后的时日(当天中午时),

$$f = 115.31 - g_6$$

则

$$\delta = -23.9959 + g_6 \qquad (2-110)$$

细察 g_4、g_5 和 g_6 三算式的各系数,不难发现它们之间仅有十分微小的差异:n^2 项系数之差小于 10^{-6},n^4 项系数之差小于 10^{-10},则 g_4、g_5 和 g_6 三者之间的差远小于 0.01。所以,崇天、明天和观天三历的太阳视赤纬计算公式完全可视为等价的。换句话说,明天和观天二历的算式是因袭崇天历而来的,周琮和皇居卿只是不愿承因袭之名,对系数的表观稍做变化而已。又,这三家历法的算式所取函数形式与边冈法也完全相同,所以它们都是边冈算式的直接承继者。

二、纪元历太阳视赤纬算式

到北宋姚舜辅纪元历,推求太阳视赤纬值的算式才又发生了重大的变革。其术曰:

求每日赤道内外度:置所求日午中日行积度及分(n),如不满二至限(182.6218),在象限(91.3109)以下为冬至后度;象限以上,用减二至限,为夏至前度。如满二至限去之,余在象限以下,为夏至后度;象限以上,用减二至限,为冬至前度。并置之于上,列象限于下,以上减下,余以乘上,冬至前后五百一十七而一,夏至前后四百而一为度,不满,退除为分,以加二至前后度,所得,用减象限,余置于上,列二至限于下,以上减下,余以乘上

（其度分秒者皆以百通，然后乘之），退一位，如三十四万八千八百五十六而一为秒，满百为分，分满百为度，即所求日黄道在赤道内外度及分(δ)。①

依之，可列算式如下：

对于冬至前后的时日（当天中午时），设：

$$m_1=91.3109-\left[\frac{(91.3109-n)n}{517}+n\right]$$

则：

$$-\delta=\frac{(182.6218-m_1)m_1\times10^8}{348856\times10^5}$$

$$\delta=-23.90+\frac{608.3109^2n^2-1216.6218n^3+n^4}{517^2\times348.856}$$

(2—111)

对于夏至前后的时日（当天中午时），设：

$$m_2=91.3109-\left[\frac{(91.3109-n)n}{400}+n\right]$$

则：

$$\delta=\frac{(182.6218-m_2)m_2\times10^8}{348856\times10^5}$$

$$=23.90-\frac{491.3109^2n^2-982.6218n^3+n^4}{400^2\times348.856} \quad (2—112)$$

上两式中，$n\leqslant91.3109$，若 $n>91.3109$，需要 182.6218 返减之。

姚舜辅算式是一个包括常数项及二、三、四次项的函数式，显然它较边冈等人的算式有了新的发展。南宋诸历皆取用姚舜辅算式，可见其影响是很大的。

---

①《宋史·律历志十二》。

在授时历中,列有"黄道出入赤道内外、去极度及半昼夜分"的数值表格,它以冬、夏至为起点,每隔一黄道度(共计91.31度)给出一个黄道出入赤道内外度、内外差、去极度等数值,其中内外差为相邻两黄道度时黄道内外度之差。推求每日黄道内外度、去极度的方法是:

> 置所求日晨前夜半黄道积度,满半岁周去之,在象限以下,为初限;以上,覆减半岁周,余为入末限;满积度去之,余以其段内外差乘之,百约之,所得,用减内外度,为出入赤道内外度,内减外加象限,即所求去极度及分秒。①

这就是说,欲推求任一日夜半时的太阳视赤纬值,可使用上述表格,以一次差内插法求算之。那么,从表面上看,这是一种表格计算法,诚然,授时历的表格是将一象限分为92段,而前述传统的表格仅将一象限分成6段,这是一个较大的差异,这一差异说明授时历的表格计算法要比传统的表格计算法精细得多。

问题的关键在于:授时历的表格所示各数值的求得,是应用了相当于球面三角法中求解直角三角形的方法②,这是一种新颖的公式计算法,是与边冈、姚舜辅等人所采用的方法截然不同的,尽管它们同属于公式计算法的范畴。

据研究③,边冈太阳视赤纬算式的平均误差为0°.09,其法初立,便接近达到一行大衍历太阳视赤纬表格计算法的水平。史序算式的平均误差却大到0°.45,这显然与他取a为引数而不是取m为引数有重要关系。后世历家未接受史序算式是不无理由的。

---

① 《元史·历志四》。

② 钱宝琮,主编:《中国数学史》,科学出版社,1964年,第213页。

③ 陈美东:《中国古代太阳视赤纬计算法》,《自然科学史研究》,1987年,第3期。

宋行古、周琮和皇居卿算式的平均误差分别为 0°.23、0°.20 和 0°.21，其大小很接近，只要顾及上述我们对此三家算式的分析，这种状况是毫不足怪的。它们都是边冈算式的直接继承者，可惜它们都没有超越前者，究其原因，主要是由于式(2—105)至式(2—110)均取黄赤交角为 24 度造成的。而这一时代黄赤交角值理应为 23.9 度，边冈取用的正是该值。

姚舜辅是一个不拘泥于现状的革新者，他给出了与众不同的新算式，其平均误差为 0°.11，达到了与边冈算式不相上下的精度水平。姚舜辅算法的出现，结束了边冈以后太阳视赤纬算式的精度所处的徘徊以致退却的局面。郭守敬等人算式的平均误差亦为 0°.11，未获突破，这是由于郭守敬等人应用的会圆术弧矢公式误差较大，并且以 $\pi=3$ 入算[①]等原因造成的。

第六节　昼夜漏刻长度算式

昼夜漏刻长度与太阳视赤纬值之间存在有机的关系，中国古代历家早就有所认识，在第一章第五节中，我们已经提及，汉和帝永元十四年(102)霍融就指出“漏刻以日长短为数，率日南北二度四分而增减一刻”[②]，这一认识为后世历家所倚重，产生了深远影响。唐末边冈在创立太阳视赤纬算式的同时，也创立了昼夜漏刻长度算式，两算式之间存在相类似的因子，这正是基于这一认识而设定的。边冈在崇玄历中是这样描述昼夜漏刻长度算式的：

以消息数(G)，春分后加一千七百五十二，秋分后以减二千七百四十八，即各其日晷漏母也。凡晷漏，百

---

① 钱宝琮，主编:《中国数学史》，科学出版社，1964 年，第 214 页。

② 《续汉书·律历志中》。

为刻。不满，以象积(480)乘之，百约为分，得夜半定漏(L_0)。①

依术文意，对于春、秋分后分别用下列两式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{100}(1752+G) \\ L_0 &= \frac{1}{100}(2748-G) \end{aligned}\right\} \qquad (2-113)$$

其中 G 即式(2－101)和式(2－102)中的 $g_1\times\frac{10000}{480}$，则

$$G=\frac{460}{6003}n^2-\frac{8}{4004001}n^4$$

式中 L_0 为夜漏刻长度之半。n 的含义自然与式(2－101)相同。又，式(2－113)同式(2－101)和式(2－102)具有完全相同的函数形式。

由式(2－113)和式(2－101)、式(2－102)可知，春、秋分后 L_0 和 δ 之间的关系为：

$$L_0=22.5\pm\frac{\delta}{4.8} \qquad (2-114)$$

这正是霍融当年所描述的两者间的数量关系。

在北宋史序的仪天历中，关于昼夜漏刻长度算式的术文是：

各以其日损益差(g_2 或 g_3)，自春分初日以后加一千七百六十八，自秋分初日以后减二千七百七十七，各得其日暑漏母，又曰晨分。又，置其日晨分，以刻法(101)除之为刻，不满为分，即所求日夜半定漏(L_0)。②

① 《新唐书·历志六下》。
② 《宋史·律历志五》。

依术文意，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned}L_0&=\frac{1}{101}[1768+g_2(\text{或 }g_3)]\\L_0&=\frac{1}{101}[2777-g_2(\text{或 }g_3)]\end{aligned}\right\}\qquad(2-115)$$

式中，g_2、g_3 即式(2—103)和式(2—104)中的 g_2、g_3。

由式(2—115)和式(2—103)、式(2—104)可知，春分到夏至、夏至到秋分、秋分到冬至、冬至到春分时，L_0 和 δ 之间的关系分别为：

$$\left.\begin{aligned}L_0&=22.49-\frac{\delta}{4.80}\\L_0&=22.51+\frac{\delta}{4.80}\\L_0&=22.47-\frac{\delta}{4.76}\\L_0&=22.53+\frac{\delta}{4.76}\end{aligned}\right\}\qquad(2-116)$$

史序显然认为在上述四个不同时段中，昼夜漏刻长度同太阳视赤纬之间的关系，并不遵循统一的规律，而是小有差异。但从总体而言，还是不离霍融当年所述，只是做了些微修订而已。

北宋宋行古的崇天历也给出了昼夜漏刻长度算式，其术文曰：

> 以每日消息定数(G_1)，春分后加一千八百五十三少，秋分后减二千九百一十二少，各为每日晨分。
>
> 置晨分，进一位，以刻法(1059)除为刻，不满为分，即每日夜半定漏(L_0)。①

① 《宋史·律历志五》。

依此，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{10}{1059}(1853.25+G_1) \\ L_0 &= \frac{10}{1059}(2912.25-G_1) \end{aligned}\right\} \qquad (2-117)$$

式中，G_1 即前述式(2－105)和式(2－106)中的 $g_4\times\frac{353}{16}$，则：

$$G_1=\frac{28795}{370031}n^2-\frac{5000}{370031\times7873}n^4$$

北宋周琮明天历的昼夜漏刻长度算式可表述如次：

以消息定数(G_2)，春分后加六千八百二十五，秋分后减一万七百二十五，余为所求日晨分。

置其日晨分，以刻法(390)除之为刻，不满为分，即所求日夜半定漏(L_0)。①

依术文意，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{390}(6825+G_2) \\ L_0 &= \frac{1}{390}(10725-G_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2-118)$$

式中，$G_2=g_5\times\frac{325}{4}$，$g_5$ 即式(2－107)和式(2－108)中的 g_5，则：

$$G_2=\frac{530000}{1849197}n^2-\frac{125000}{1849197\times10689}n^4$$

北宋皇居卿观天历的相应算式的术文有如下述："置其日消息定数(G_3)，春分后加二千一百[五]少，秋分后减三千三百八少，

① 《宋史·律历志八》。

各为其日晨分。"又,"置晨分,进一位,如刻法而一为刻,不满为刻分,即每日夜半定漏(L_0)",其"刻法一千[二]百三"。①

据研究②,上术文中需做必要补正,依之,对于春、秋分后则有如下算式:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{10}{1203}(2105.25+G_3) \\ L_0 &= \frac{10}{1203}(3308.25-G_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2-119)$$

式中 G_3 即式(2－109)和式(2－110)中的 $g_6\times\frac{401}{16}$,

则:

$$G_3=\frac{76335}{863567}n^2-\frac{49000}{863567\times 29109}n^4$$

又据研究表明③,式(2－117)和式(2－118)同式(2－119)基本上是等价的,这就是说周琮和皇居卿实际上是依据宋行古算式推出各自的算式的,依此三算式计算的偏离将不大于 0.01 刻。

此外,由式(2－115)和式(2－103)、式(2－104);式(2－117)和式(2－105)、式(2－106);式(2－118)和式(2－107)、式(2－108)均可推得 L_0 和 δ 之间的关系如式(2－114)所示。由此看来,宋行古、周琮和皇居卿算式又都是遵循边冈的思路和方法,小做修正而推得的。

如果说自崇玄历到观天历的二百年间,昼夜漏刻长度算式均大同小异,那么,姚舜辅的纪元历(1106)关于漏刻的公式计算法则有了重大的改革,其术文曰:

---

① 《宋史·律历志十》。

② 陈美东,李东生:《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》,《自然科学史研究》,1990 年,第 1 期。

③ 陈美东,李东生:《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》,《自然科学史研究》,1990 年,第 1 期。

置所求日黄道去赤道内外度及分(即太阳视赤纬δ),以三百六十三乘之,进一位,如二百三十九而一,所得,以加减一千八百二十二半,赤道内以减,赤道外以加,为所求日日出分。

置日出分,倍之,进一位,满刻法(729)为刻,不满为分,即所求日夜刻(L_1)。[①]

依术文意:

$$L_1=\frac{20}{729}\left(1822.5-\frac{3630\delta}{239}\right) \qquad (2-120)$$

式中L_1即指夜漏刻长度。δ即如前述式(2－111)和式(2－112)所示者。式(2－120)为南宋诸历所采用,其影响是很大的。其实式(2—120)又可改写为:

$$L_1=50-\frac{\delta}{2.4} \qquad (2-121)$$

这说明姚舜辅还是沿袭霍融当年关于漏刻长度与太阳视赤纬之间数量关系的认识,即便姚舜辅已经知道黄赤交角不再是24度,而是23.9度,在式(2—120)中也未做相应的调整。其实,边冈算式也有与此完全相同的弊病,因为边冈也已认为黄赤交角应为23.9度[②]。

在郭守敬等人的授时历中,则列有"黄道出入赤道内外,去极度及半昼夜分"[③]数值表,其中"半昼夜分"就是我们所要讨论的漏刻表,该表以冬至或夏至为起点,每隔一黄道度(从0度到91度和91.3度)给出一个半昼夜漏刻分值(1刻＝10000分),共计93

---

① 《宋史·律历志十二》。

② 陈美东:《试论我国古代黄赤交角的测量》,《科技史文集》第3辑,上海科学技术出版社,1980年。

③ 《元史·历志四》。

个数值。在该表中还有"昼夜差"一栏，它等于相邻两黄道度间半昼夜漏刻之差。欲求任一日的半昼夜分，其方法是：

> 置所求入初末限，满积度，去之，余以昼夜差乘之，百约之，所得，加减其段半昼夜分，为所求日半昼夜分。

由此可知，在应用上述表格时是以一次差内插法进行计算的。它与表格计算法相类似，但该表格较前代历法的相应表格精细得多，所以虽用的是一次差内插法也较前为优。更重要的是，该表格所列各数值，是应用了相当于球面三角中求解直角三角形的方法[①]，即一种既具实测基础，又由较严密的数学公式计算而得的。由于授时历的昼夜漏刻长度算式比较繁杂，为便于日常的计算，郭守敬等人在这里显然采取了公式计算为基础的表格计算法。

据研究[②]，边冈昼夜漏刻长度算式的平均误差为 4.6 分钟，创法伊始便达到了其前表格计算法所达到的较高水平。而史序昼夜漏刻长度算式的平均误差为 7.9 分钟，精度明显下降，究其所以然，应与前已述及的史序太阳视赤纬算式误差较大的原因相同。宋行古、周琮和皇居卿昼夜漏刻长度算式的平均误差分别为 6.2、4.9 和 4.9 分钟。如上所述，这三家算式基本上是等价的，之所以宋行古算式的平均误差大于周琮和皇居卿算式，是因为宋行古算式是用于河南登封阳城（地理纬度 $\phi=34^{\circ}.4047$）的，而后二者是用于河南开封俊仪（$\phi=34^{\circ}.8125$）的。姚舜辅算式的平均误差为 3.8 分钟，较以前诸算式的精度都要高，可见姚舜辅的改革基本上是成功的。而更大的成功则属于郭守敬等人所采用的算

---

① 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964 年，第 213 页。

② 陈美东，李东生：《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》，《自然科学史研究》，1990 年，第 1 期。

式，其平均误差仅 0.7 分钟，达到了中国历史上最高的精度水平。

第七节　晷长算式

一、崇玄历、仪天历、崇天历晷长算式

最先发明晷长算式的，也是唐末的边冈，他在崇玄历中对该算式作如下表述：

> 各计其日中入二至加时已来日数及余(A)，如初限①以下，为后；以上，以减二至限(182.62225 日)，余为前，副之。各以乘数②乘之，用减初、末差③，所得，再乘其副，满百万为尺，不满为寸、为分。夏至[前]④后，则退一等，皆命曰晷差。冬至前后⑤，以减冬至中晷(12.7150 尺)；夏至前后⑥，以加夏至中晷(1.4780 尺)，为每日阳城中晷(B)。与次日相减，后多曰息，后少曰消。以冬、夏至午前、后约分乘之，万而一，午(前)[后]⑦息减、消加，午(后)[前]息加、消减中晷，为定数(H)也。凡冬至初日，有减无加；夏至初日，有加无减。⑧

依术文意，冬至前限、夏至后限时，

$$B=12.7150-(2195-15A)A^2\times10^{-6} \qquad (2-122)$$

---

① 冬至前限、夏至后限 59 日；夏至前限、冬至后限 123.62225 日。

② 冬至前限、夏至后限乘数 15；夏至前限、冬至后限乘数 4。

③ 冬至前限、夏至后限差 2195；夏至前限、冬至后限差 4880。

④ [ ]中为脱字，应补上，下同。

⑤ 指冬至前限和夏至后限。

⑥ 指夏至前限和冬至后限。

⑦ ( )中字为[ ]中字之误，下同。

⑧ 《新唐书·历志六下》。

夏至前限、冬至后限时，

$$B=1.4780+(4880-4A)A^2\times10^{-7} \quad (2-123)$$

它们均为含有常数项、二次项和三次项的函数式。

当冬至后 $A<59$ 日时，用式(2－122)计算；夏至后 $A>123.62225$ 日时，需返减 182.62225 日，亦以式(2－122)计。当冬至后 $A>59$ 日时，需返减 182.62225 日，用式(2－123)计；夏至后 $A<123.62225$ 日时，亦用式(2－123)计算。

又，式(2－122)和式(2－123)中，A 是指所求日午中(50 刻)与二至时刻(设为 N 刻)之间的时距加上日躔盈缩改正后的定日数及分。以此代入式(2－122)或式(2－123)算得者，应是所求日 $(50-N)$ 刻时的晷长值。所以，还需进一步推算所求日 50 刻时的晷长，即所谓定数 H。

为此，要先求出所求日与次日中晷相减之数(S)。而崇玄历是以 $\frac{|50-N|}{100}\times10000$ 为二至午前、后的约分值，所以需除以一万(万而一)，始得二至午前、后的日数值，此亦即所求日午前、后的日数值(P)。设所求日与次日间中晷长度的变化是均匀的，则 $P\cdot S$ 就是由 B 推算 H 的修正值。当 $N<50$ 刻时(午前)，对夏至后而言，因其晷影渐长(后多曰息)，则 $H=B+PS$(息加)；对冬至后而言，因其晷影渐短(后少曰消)，则 $H=B-PS$(消减)。而当 $N>50$ 刻时(午后)，同理，对夏至后而言，$H=B-PS$(息减)；对冬至后而言，$H=B+PS$(消加)。若所求日为冬至初日，该日午前、后晷影均渐短，$H\equiv B-PS$(有减无加)。若为夏至初日，该日午前、后晷影均渐长，$H\equiv B+PS$(有加无减)。还要指出的是：崇玄历由 B 求 H 的方法，只是沿用了一行大衍历的成法而已。

北宋史序晷长算式的术文为：

置入冬、夏二至后来日数及分(A_1)，以所入象①日数下盈缩分盈减缩加之，为其日定积(A_2)；又以减其象小余(K)，为夜半定积及分(A_3)，以隔位除一。用若夜半定积及分(A)在二至上限以下者，为入上限之数；以上者，以返减前限日及约余(182.622275日)，为入下限日及分。若冬至后上限、夏至后下限(均为59日)，以十四乘之，所得，以减上、下限差分(2130)，为定差法；以所入上、下限日数再乘之，所得，满一百万为尺，不满为寸及分，以减冬至晷影(12.7150尺)，余为其日中晷景常数(B_1)也。若夏至后上限、冬至后下限(均为123.622275日)，以三十五乘之，[所得，退一等]，以[减]上、下[限]差分(4812)，为定[差]法；以入上、下限日数再乘之，退一等，满一百万为尺，不满尺为寸及分，用加夏至晷景(1.4784尺)，即得其日中晷景常数(B_2)。②

依此，冬至后上限、夏至后下限时，

$$B_1 = 12.7150 - (2130 - 14A)A^2 \times 10^{-6} \qquad (2-124)$$

夏至后上限、冬至后下限时，

$$B_2 = 1.4784 + (4812 - 3.5A)A^2 \times 10^{-7} \qquad (2-125)$$

这里式(2－125)是依我们对上术文做了补正后列出的，而做这种补正的理由可参见有关论文③。

式(2－124)和式(2－125)所适用的A值大小和界定，分别与

① 冬至后初象、夏至后次象88.8811日，夏至后初象、冬至后次象93.7412日。

② 《宋史·律历志二》。

③ 陈美东:《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》,《自然科学史研究》,1985年,第3期。

式(2－122)和式(2－123)类同,所稍异者,需以 182.622275 和 123.622275 分别代替 182.62225 和 123.62225。

术文中 A_1 为所求日与二至时刻(N_1)之间的整日积分数;A_2 是 A_1 加日躔盈缩改正后的定积分数;而 $A_3=A_2-N_1$,这里 N_1 亦称为"其象小余",则 A_3 即为所求日夜半与二至时刻间的定积分数。[1]

又由于仪天历中的 A_1、日躔盈缩改正值、N_1 等均是用宗法(10100)为分母的积分值表示的,若要化作以万为分母的定日数及分,则需"以隔位除一",即令 $\frac{A_3}{10100}=A$,此即为所求日夜半与二至时刻间的定日数及分。

于是,由式(2－124)和式(2－125)算得的 B 值是所求日夜半时的晷长,还要进一步推求该日午中时的晷长,即所谓"阳城中晷景定数",其术曰:

> 求晷景每日损益差:以其日晷景与次日晷景相减(得 S),其日景长于次日晷景为损,短于次日晷景为益。
>
> 求阳城中晷景定数(H):置五千分,以其日晷景定数损益差乘之,所得,以万约之为分,冬至后用减,夏至后用加。冬至一日有减无加,夏至一日有加无减。[2]

这同大衍历、崇玄历的处理原则是一致的。由于仪天历算得的 B 值适当夜半之时,其 $P\equiv\frac{5000}{10000}$,于是,对冬至后而言,

---

[1] 严格地说,由于 N_1 值并未加日躔盈缩改正,故 A_3 仅是上二者之间定积分数的约值。但虑及该改正值较小,姑可视 A_3 为上二者之间的定积分数。

[2] 《宋史·律历志二》。

$H=B-\frac{S}{2}$；对夏至后而言，$H=B+\frac{S}{2}$。这样看来，仪天历由 B 求 H 的方法，较大衍历、崇玄历要稍简便些。

接着，我们再来讨论宋行古崇天历的晷长算式，其术曰：

> 置入二至初、末限定日及分(A)，如冬至后初限、夏至后末限(62 日)者，以初、末限日及分减一百四十六，余退一等，为定差；又以初、末限日及分自相乘，以乘定差，满六千六百四十五为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差减冬至晷数(12.7150 尺)，即其日阳城午中晷景定数(H_1)。如冬至后末限、夏至后初限者(120.62 日)，以初、末限日及分减一千二百一十七，余再退，为定差；亦以初、末限日及分自相乘，以乘定差，满二万四千九百三十余(此"余"字当衍)为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差加夏至晷数(1.4780 尺)，即其日阳城中晷定数(H_2)。[①]

由此，冬至后初限、夏至后末限时，

$$H_1=12.7150-\frac{(146-A)A^2}{66450}$$
$$\approx 12.7150-(2197.14-15.05A)A^2\times 10^{-6} \qquad (2-126)$$

夏至后初限、冬至后末限时，

$$H_2=1.4780+\frac{(1217-A)A^2}{2493000}$$
$$\approx 1.4780+(4881.67-4.01A)A^2\times 10^{-7} \qquad (2-127)$$

令式(2－126)和式(2－122)，式(2－127)和式(2－123)比较

---

① 《宋史·律历志五》。

知，它们之间是极近似的，可以说式(2－126)和式(2－127)是由式(2－122)和式(2－123)稍加变化而得的。但崇天历也不无改革，这主要表现在 A 值的推求上：

> 各计入二至后日数(A')，乃如半日之分五十(得 A'')，又以二至约分(N)减之，即入二至后来午中日数及分(A''')。置 A'''，以其日午中入气盈缩分(盈)[缩]加(缩)[盈]减之，各如初限以下为在初限；以上，覆减二至限，余为入末限定日及分(A)。[1]

此中，A' 为所求日到二至时刻（即约分 N 刻）间的整日数；$A''=A'+0.5$ 日，为所求日 $N+50$ 刻到二至 N 刻间的日数及分；$A'''=A''-N$，即为所求日午中到二至时刻的日数及分。A 则为 A''' 加日躔盈缩改正后的定日数及分。查崇天历“求定气日”的术文为：

> 以其气下盈缩分盈减缩加常气约余为定气。[2]

可证现传本上术文中“盈”、“缩”二字需互换。

又，当冬至后 $A<62$ 日时，用式(2－126)，夏至后 $A>120.62$ 日时，需返减 182.62 日，亦用式(2－126)计算。当冬至后 $A>62$ 日时，需返减 182.62 日，用式(2－127)；夏至后 $A>120.62$ 日时，亦用式(2－127)计算。

如上所述，崇玄历的 A 值未加入二至约余的修订，而仪天历的 A 值未考虑夜半与午中时刻间的修订（其 A 值尚存在的另一

---

① 《宋史·律历志五》。

②《宋史·律历志五》。

个弊病已如上述），使得由 B 求 H 时，不得不引进所求日与次日晷影变化均匀的假设，并用一次差内插法，且 P 值也未加入日躔盈缩的改正，使整个计算过程显得不够严密和比较繁杂。崇天历的 A 值，对上述两项的修订进行在先，又统一做了日躔盈缩的改正，代入式(2－126)和式(2－127)便可直接求得所求日午中的晷长值(H)，比起崇玄历、仪天历先求 B 再求 H 的旧程序来，收到了既便捷又严谨的效果。这是崇天历晷长计算法的优越性所在。

二、明天历和纪元历晷长算式

边冈、史序和宋行古晷长算式同属一种类型。而周琮则在明天历中给出了一种新型的晷长算式，其术曰：

> 求岳台晷景午中定数：置所求午中积数，如初限（冬至后初限 45.62 日，夏至后初限 137 日）以下者为在初；以上者，覆减二至限(182.62 日)，余为在末。其在冬至后初限、夏至后末限(45.62 日)者，以入限日(M)减一千九百三十七半为泛差；仍以入限日分乘其日盈缩积（“积”应为“差”之误），五因百约（“百约”二字应为衍文）之，用减泛差，为定差；乃以入限日分自相乘，以乘定差，满一百万为尺，不满为寸、为分及小分，以减冬至常晷(12.85 尺)，余为其日午中晷景定数。若所求入冬至后末限(137 日)、夏至后初限者，乃三约入限日分，以减四百八十五少，余为泛差；仍以盈缩差减极数(2.4)，余者若在春分后、秋分前者，直以四约之（“约”和“之”两字间应补“百乘”二字），以加泛差，为定差；若春分前、秋分后者，以去二分日数及分(91.31 日)乘之，满六百（“百”字应为衍文）而一，以减泛差，余为定差；乃以入限日分自相乘，以乘定差，满一百

> 万为尺，不满为寸为分及小分，以加夏至常晷(1.57尺)，即为其日午中晷景定数(B)。①

以上术文中的“午中积数”的求算法是：

> 计入二至后来日数，以二至约余减之，仍加半日之分，即为入二至后来日午中积数及分。②

而“盈缩差”的计算法即如前述式(2—42)所示。

依据上述做了必要订正后的术文，可以列出如下三个计算每日午中晷长(B)的算式：

对于冬至后初限($M<45.62$ 日)和夏至后末限($M>137$ 日，需以 182.62 日返减之)，

$$B=12.85-\left[(1937.5-M)-\frac{5(200-M)M^2}{4135}\right]M^2\times10^{-6}$$

$$=12.85-\left(1937.5M^2-M^3-\frac{200}{827}M^4+\frac{1}{827}M^5\right)\times10^{-6} \quad (2-128)$$

对于冬至后末限、春分后(91.31 日$<M<$182.62 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、秋分前($M<91.31$ 日)，

$$B=1.57+\left[\left(485.25-\frac{M}{3}\right)+\frac{100}{4}\times\left(2.4-\frac{(200-M)M}{4135}\right)\right]M^2\times10^{-6}$$

$$=1.57+\left(545.25M^2-\frac{3827}{2481}M^2+\frac{5}{827}M^4\right)\times10^{-6} \quad (2-129)$$

对于冬至后末限、春分前(45.62 日$<M<$91.31 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、秋分后(91.31 日$<M<$137 日)，

---

① 《宋史·律历志八》。

② 《宋史·律历志八》。

$$B=1.57+\left\{\left(485.25-\frac{M}{3}\right)-\frac{1}{6}\left[2.4-\frac{200-(182.62-M)}{4135}(182.62-M)\right]\times(M-91.31)\right\}M^2\times10^{-6}$$

$$=1.57+(510.09274M^2-1.213548M^3+0.01034059M^4-0.0000403063M^5)\times10^{-6} \quad (2-130)$$

依入限日分M的大小，有选择地应用如上三式中的一个算式，便可算得任一时日午中晷长值。如上三式是包含有常数项，二、三、四次项，以至五次项的函数式，是中国古代历法中出现的最高次项的算式。

北宋皇居卿在观天历中取用了与周琮完全相同的晷长算法。

北宋姚舜辅对每日午中晷长算式重加研究，又出新法，在纪元历中，载有其术：

> 求岳台晷影午中定数：冬至后初限、夏至后末限(62.20日)，以百通日，内分，自相乘，为实，置之；以七百二十五除之，所得，加一十万六百一十七，并入限分，折半为法，实如法而一为分，不满，退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，用减冬至岳台晷影常数(12.83尺)，即得所求[日]午中晷影定数。夏至后初限、冬至后末限(120.42日)，以百通日，内分，自相乘，为实，乃置入限分，九因，再折，加一十九万八千七十五为法，其夏至前后，日(指入限日分)如在半限(指二至限之半，等于91.31日)以上者，减去半限，余置于上，列半限于下，以上减下，余以乘上，进二位，七十七除之，所得加法为定法；然后除之。实如法而一为分，不满，退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，以加夏至岳台晷影常数(1.56

尺)，即得所求日午中晷影定数(B)。[①]

依术文意，亦可列出如下三个计算每日午中晷长的算式：

对于冬至后初限($M<62.20$ 日)和夏至后末限($M>120.42$ 日，需以 182.62 日返减之)，

$$B=12.83-\frac{20000M^2}{\left(100617+100M+\frac{10000M^2}{725}\right)\times 100}$$

$$=12.83-\frac{200M^2}{100617+100M+\frac{400}{29}M^2} \quad (2-131)$$

对于冬至后末限、半限以上(91.31 日$<M<$182.62 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、半限以下($M<$91.31 日)，

$$B=1.56+\frac{10000M^2}{\left(\frac{900M}{4}+198075\right)\times 100}=1.56+\frac{4M^2}{7923+9M} \quad (2-132)$$

对于冬至后末限、半限以下(62.20 日$<M<$91.31 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、半限以上(91.31 日$<M<$120.42日)，

$$B=1.56+\frac{10000M^2}{\left[\left(\frac{900M}{4}+198075\right)+\frac{(182.62-M)(M-91.31)\times 100}{77}\right]}\times 100$$

$$=1.56+\frac{7700M^2}{13584271.78+44718M-100M^2} \quad (2-133)$$

上三式中，M 的含义与式(2－128)、式(2－129)、式(2－130)中 M 的含义是相同的，且它们均以日为单位。上三式所取的函数

---

① 《宋史・律历志十二》。

形式与前述各算式完全不同。对这种函数形式,我们一时也还难以给它一个合适的名称,姑且称之为姚舜辅晷长函数,这是姚舜辅独辟蹊径,为晷长计算设计的特定函数。南宋各历法,以及金代赵知微的重修大明历和元代耶律楚材的庚午历的晷长算式,均沿用姚舜辅法,可见其影响之深远。

还要指出的是,周琮和姚舜辅算式都把一回归年内晷长的计算分为三个不同的段落,分别用三个不同的算式来计算,这显然是周琮等人的创造,而姚舜辅则继而承之。只是周琮晷长计算法分别以 45.62 日和 137 日作为冬至和夏至初、末限的分界点,而姚舜辅晷长计算法则分别以 62.20 日和 120.42 日为分界点,而另一对分界点春分和秋分,同半限实际上是相同的。这种三段分法与算法,是与一回归年内每日晷长变化的实际状况相应的,它较边冈等人晷长计算法的二段分法与算法更为符合实际。

研究表明,边冈晷长算式的平均误差为 0.025 尺,基本保持在取表格计算法的一行大衍历的精度水平上。史序晷长算式的平均误差较大,为 0.038 尺。宋行古晷长算式的平均误差为 0.027尺,稍逊于边冈[1]。而周琮晷长算式的平均误差降为 0.019 尺,这说明周琮推出新类型的算式是有效的,姚舜辅晷长算式更开拓了一条超胜前人的成功之路,其平均误差降至 0.011 尺[2]。

第八节　月亮极黄纬算式

首创月亮极黄纬算式者,还是唐末的边冈,他在崇玄历中对

① 陈美东:《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》,《自然科学史研究》,1985 年,第 3 期。

② 陈美东:《皇祐、崇宁晷长计算法之研究》,《自然科学史研究》,1989 年,第 1 期。

该算式表述如下：

> 如一象(91度)以下，为在少象；以上者，反减[半]半交(91度)，余为入老象(d)。皆七十三乘之，退一等。用减千三百二十四，余以乘老、少象度及余，再退为分，副之。在少象三十度以下，老象六十一度以上，[反减九十一度]，皆与九十一先相减后相乘，五十六除，为差。若少象三十度以上，反减九十一度，及老象六十[一]度以下，皆自相乘，百五除，为差。皆以减副，百约为度，即朔望后夜半月去黄道度分(R)。①

依术文意，可列出如下二式：

当少象<30度，与老象>61度(需以91度返减之)时，

$$R=\frac{\left(1324-\frac{73}{10}d\right)}{10000}-\frac{(91-d)}{5600}$$

$$=\frac{1}{7\times10^5}(81305d-386d^2) \qquad (2-134)$$

当少象$d>30$度(需以91度返减之)，与老象$d<61$度时，

$$R=\frac{\left(1324-\frac{73}{10}d\right)}{10000}-\frac{(91-d)^2}{10500}$$

$$=\frac{-1}{21\times10^5}(1656200-314440d+1733d^2) \qquad (2-135)$$

上两式中，d为所求时日月亮与黄白交点的度距，该度距由所求时日与月亮过黄白交点时日之间的时距推求而得。

五代王朴继边冈而起，在其钦天历中亦用公式计算法，但所

① 《新唐书·历志六下》。

用算式与边冈不同：

置入交定日(m)，交中(13.60611日)以下，月行阳道；以上，去之，月行阴道。皆以经法(72)通之，用减九百八十，余以乘之，五百五十六而一，为分，满经法为度。行阳道，在黄道外；行阴道，在黄道内，即所求月去黄道内外度(R)也。[①]

依此可得：

$$R=\frac{72(980-72m)m}{72\times556}=\frac{1}{139}(245m-18m^2) \quad (2-136)$$

式中 m 为所求时日与月亮过黄白升交点时日之间的时距。$m<13.60611$ 日，若 $m>13.60611$ 日，则需以 13.60611 日减去之。

北宋宋行古崇天历的公式计算法较边冈法有所改进。其法曰：

置入阴阳历积度及分，如交象(90.94度)以下，为在少象；以上，覆减半交(181.88度)，余为入老象。置所入老、少象度及分(d)，以五因之，用减一千一十，余，以老、少象度及分乘之，八十四而一，列于上位；又置所入老、少象度及分，如半象(45.47度)以下为在初限；以上，减去半象，余为入末限。置初、末限度及分于上，列半象度及分于下，以上减下，余以乘上，四十而一，所得，初限以减，末限以加上位，满百为度，不满为分，即朔望

① 《新五代史·司天考一》。

加时月去黄道度数及分(R)。[①]

据此可列出如下两式：

当$d<45.47$度时，

$$R=\frac{(1010-5d)}{8400}-\frac{(45.47-d)d}{4000}$$
$$=\frac{1}{840000}(91451d-290d^2) \qquad (2-137)$$

当$45.47<d<90.94$度时，

$$R=\frac{(1010-5d)}{8400}+\frac{[45.47-(d-45.47)](d-45.47)}{4000}$$
$$=\frac{-1}{840000}(868359-129646d-710d^2) \qquad (2-138)$$

应注意，这里宋行古所取交象(90.94度)和半交(181.88度)二值是经过缜密考虑的。由于式(2－137)和式(2－138)中的d值实际上由所求时日与月亮过黄白交点时日间的时距(m)推求而得的，所以，当$d=90.94$度时，是指m等于$\frac{1}{4}$交点月长度(约等于$d/13.36875=6.8024$日)之时。已知经一交点月，黄白交点西退1.4639度$\left[\text{等于}\ 27.2122\times\left(\frac{365.2564}{27.2122}-\frac{365.2564}{27.3217}\right)\right]$[②]，则$\frac{1}{4}$交点月，黄白交点西退约0.37度。于是，在所求时日，月亮离黄白交点的实际度数应为$90.94+0.37=91.31$度$=\frac{1}{4}$周天度，即当$d=90.94$度时，月亮极黄纬达极大值。其后观天、纪元等历法均仿此。而上述崇玄历取一象为91度，可能仅是90.94度的约值。

---

① 《宋史·律历志六》。

② 13.36875、27.2122、365.2564和27.3217分别为崇天历的月亮每日平行度、交点月、恒星年和恒星月长度值。

皇居卿观天历(1092)所取计算公式,从形式上看与崇天历大同小异:

置入阴阳历积度及分,如交象(90.94 度)以下,为入少象;以上,覆减交中度(181.88 度),余为入老象(d),皆列于上,下列交中度,相减相乘,进位,如一百(二)[三]十八而一,为泛差。又视入老、少象度,如半交象(45.47)以下,为初;以上,[交象]去之,余为末,皆二因,退位,初减末加泛差,满百为度,即朔望加时月去黄道度及分(R)。①

依之,可列出如下二算式:

当 $d<45.47$ 度时,

$$R=\frac{(181.88-d)}{1380}-\frac{2d}{1000}=\frac{2239}{17250}d-\frac{1}{1380}d^2 \quad (2-139)$$

当 $45.47<n<90.94$ 度时,

$$R=\frac{(181.88-d)d}{1380}+\frac{2(d-90.94)}{1000}$$

$$=\frac{-18188}{100000}+\frac{1154}{8625}d-\frac{1}{1380}d^2 \quad (2-140)$$

以上各算式均为先相减后相乘法的灵活应用,均为二次函数式,这是它们的共同之处。由于在一象度内月亮极黄纬的变率前大而后小,所以,边冈、宋行古和皇居卿都分别给出了两种不同的二次函数式,希图较好地描述月亮极黄纬变率的实际状况,这当是边冈等三人的共同思路,此中所稍异者,是宋行古和皇居卿在选择变率的转折点时与边冈不同(前者取 $d=45.47$ 度,而后者取

① 《宋史·律历志十一》。

$d=30$ 度时)。王朴的想法则与边冈等三人不同,他更多地是考虑公式的简便性和统一性问题,可是,这样做就要降低其计算精度。

北宋姚舜辅在他的纪元历中,对月亮极黄纬的公式计算法进行了成功的改革,他既实现了公式的统一性,又保持了较高的准确度,其关键是:他不再拘泥于应用二次函数式,而采用了一个四次函数式来描述月亮极黄纬的变化规律。其术文如下:

> 视月入阴阳历积度及分,如交象(90.9486度)以下,为在少象;以上,覆减交中度(181.8972度),余为入老象。置所入老、少象度及分(d)于上,列交象度于下,以上减下,余以乘上,五百而一,所得,用减所入老、少象度及分,余[置于上],列交中度于下,以上减下,余以乘上,满一千三百七十五而一,所得为度,不满,退除为分,即为定朔望加时月去黄道度及分(R)。[①]

据之,可列出如下算式:

$$R=\frac{1}{1375}\left\{181.8972-\left[d-\frac{(90.9486-d)d}{500}\right]\right\}\times\left[d-\frac{(90.9486-d)d}{500}\right]$$

$$=\frac{1}{34375\times10^{5}}(372026500d-763324d^{2}-8181d^{3}-10d^{4})$$

(2—141)

式中 $d\leqslant 90.9486$ 度。

南宋各历法均依姚舜辅法计算月亮极黄纬值。在赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历中,载有彼此相同的“求月去黄道度”[②]术,其叙述文字与纪元历略异,但据之所列出的算式则与式

---

① 《宋史·律历志十三》。

② 《金史·历志下》,《元史·历志六》。

(2－141)全同,可知它们亦沿用了姚舜辅法。

在元代郭守敬等人的授时历中,没有关于计算月亮极黄纬方法的直接记载,如需求算其值,大约可由"每日月离赤道内外度"[①]和"每日黄道出入赤道内外度"[②]二法间接推求之。鉴于授时历未明言及此,其法暂存而不论。

据研究,边冈、王朴、宋行古、皇居卿和姚舜辅月亮极黄纬算式的平均误差分别为 0°.37、0°.50、0°.34、0°.45 和 0°.32[③]。这表明边冈的月亮极黄纬计算公式化的尝试是成功的,其精度可与一行大衍历表格计算法的水平相当。其中,王朴算式精度较低,显然与上述的王朴考虑问题的片面性相关。自边冈算式到姚舜辅算式精度的波浪起伏,反映了人们对月亮极黄纬变化规律进行探索的艰苦过程,而姚舜辅算式的精度是为历代最佳者,这正是人们艰苦探索的结晶。

第九节　交食初亏、复圆时刻算式

一、崇玄历和钦天历交食初亏、复圆时刻算式

在唐末边冈的崇玄历中还给出了日食初亏、复圆时刻的算式,最先将此类计算公式化,其术文依次是[④]:

> 在限内者,令限内分(W)自乘,百七十九而一,以减六百三十,余为阴历食差(Y_1)。限外者,置限外分(Z)

---

① 《元史・历志三》。

② 《元史・历志四》。

③ 陈美东:《中国古代月亮极黄纬计算法》,《自然科学史研究》,1988 年,第 1 期。

④ 《新唐书・历志六下》。

与五百先相减、后相乘，四百四十六而一，为阴历食差(Y_2)。又限内分亦与五百先相减、后相乘，三百一十三半而一，为阳历食差(Y_3)。

依之可得：

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=630-\frac{W^2}{179}\\Y_2&=\frac{1}{446}(500-Z)Z\\Y_3&=\frac{1}{313.5}(500-W)W\end{aligned}\right\}\qquad(2-142)$$

式中所谓限内、限外、限内外分(W、Z)的含义，另有术文给出定义和说明：

置其朔距天正中气积度(T)，以减三百六十五半，余以千乘，满三百六十五度半除为分，曰限心。加二百五十分，为限首(U_1)；减二百五十分，为限尾(U_2)，满若不足，加减一千。退食定余(I')一等，与限首、尾相近者相减，余为限内、外分(W、Z)。其食定余多于限首、少于限尾者，为外；少于限首、多于限尾者，为内。

依之又可列出下式：

$$W=\frac{I'}{10}-U_1$$

$$Z=\frac{I'}{10}-U_2$$

$$U_1=\frac{(365.5-T)\times1000}{365.5}+250=1250-\frac{1000}{365.5}T$$

$$U_2=\frac{(365.5-T)\times1000}{365.5}-250=750-\frac{1000}{365.5}T$$

式中 T 为定朔时日月与冬至点的距度。I'即由式(2－62)或式(2－63)算得者。若 $U_1>1000$,需以1000减去之;若 U_2 为负值,需加以1000。当 $U_1<I'<U_2$ 时,为在限外;当 $U_1>I'>U_2$ 时,为在限内。取$|I'-U_1|$和$|I'-U_2|$中的小者为 W 或 Z 值。

在五代王朴钦天历中则给出了日、月食初亏、复圆时刻算式,其术分别为:[1]

> 各置泛用分(B'),以平离(963)乘之,其日离程(A_1)而一,为定用分(D_0),以减朔、望定分(I_0),为亏初(C'_1)。加之复末(C'_2)。加时常分(Q),如食甚术推之,得亏初、复末定分(C_1、C_2)。

依之则有:

$$C_1=C'_1+Q=I_0-D_0+Q=I_0-\frac{963B'}{A_1}+Q \quad (2-143)$$

$$C_2=C'_2+Q=I_0+D_0+Q=I_0+\frac{963B'}{A_1}+Q \quad (2-144)$$

式中,I_0 为定朔或定望时刻;A_1 为当日月亮实行分值,可由月离表推算而得;Q 为日食时差(月食时 $Q=0$);而 B'的推求,钦天历另有术文曰:

> 日食泛用分($B'_{日}$):置距食分(E_1),一千九百一十二以上,用减四千七百八十,余自相乘,六万三千二百七十二除之,以减六百四十七,为泛用分;九百五十六以(下)[上],用减一千九百一十二,余以通法(100)乘之,七百三十五而一,以减五百一十七,为泛用分;九百五十

① 《新五代史·司天考一》。

六以(上)[下],以距食分[减之,余],自相乘,二千三百六十二除之,用减三百八十七,为泛用分。

依术文意,可列出以下诸式:

当 $E_1>1912$ 时,

$$B'_{日}=647-\frac{(4780-E_1)^2}{63272} \qquad (2-145)$$

当 $956<E_1<1912$ 时,

$$B'_{日}=517-\frac{100(1912-E_1)}{735} \qquad (2-146)$$

当 $E_1<956$ 时,

$$B'_{日}=387-\frac{(956-E_1)^2}{2362} \qquad (2-147)$$

式中,E_1 为日食限值同日食甚时日月距黄白交点度分值之差。参阅钦天历“月食泛用分”术文,上术文需做如上更正,式(2-145)、式(2-146)、式(2-147)亦正可自恰。

关于月食泛用分($B'_{月}$)的算式,钦天历又有术文曰:

置距食分(E_2)二千一百四以上,用减五千二百六十,余自相乘,六万九千一百六十九除之,以减七百一十一,为泛用分($B'_{月}$);一千五十二以上,用减二千一百四(十),余,七除之,以减五百六十七,为泛用分;一千五十二以下,以距食分减之,余,自相乘,二千六百五十四而一,用减四百一十七,为泛用分。

依此则有以下各式:

当 $E_2>2104$ 时,

$$B'_{月}=711-\frac{(5260-E_2)^2}{69169} \qquad (2-148)$$

当 $1052<E_2<2104$ 时，

$$B'_{月}=567-\frac{(2140-E_2)}{7} \qquad (2-149)$$

当 $E_2<1052$ 时，

$$B'_{月}=417-\frac{(1052-E_2)^2}{2654} \qquad (2-150)$$

式中，E_2 为月食限值同定望时日月距黄白交点度分值之差。

$B'_{日}$ 和 $B'_{月}$ 即式（2－143）和式（2－144）中的 B'，分别就日食或月食而言（下同）。

二、崇天历交食初亏、复圆时刻算式及其影响

北宋宋行古崇天历也给出求算日月食亏初、复满时刻的方法，其术文依次为：[①]

各以定用分（D_0）减食甚小余（I'），为亏初（C_1）；加食甚小余，为复满（C_2）。

即

$$\left.\begin{array}{l} C_1=I'-D_0 \\ C_2=I'+D_0 \end{array}\right\} \qquad (2-151)$$

式中 I' 为食甚小余，可依式（2－64）或式（2－65）算得。D_0 的计算另有术文曰：

置日月食泛用分（B'），以一千三百三十七乘之，以所食日转定分（A_1）除之，即得所求（D_0）。

① 《宋史·律历志六》。

依之可得：

$$D_0=\frac{1337}{A_1}B' \qquad (2-152)$$

式中，A_1 的含义与式(2－143)相同。将式(2－152)代入式(2－151)可见，式(2－151)与式(2－143)、式(2－144)的形式是完全相同的。至于式中的 B'，崇天历又有术文曰：

求日食泛用分：置朔入阴阳历食定分(E_1)，一百约之，在阳历者，列八十四于下；在阴历者，列一百四十于下，各以上减下，余以乘上，进二位，阳历以一百八十五除；阴历以五百一十四除，各为日食泛用分($B'_{日}$)。

依之可得：

当在阳历时(即月亮极黄纬大于一象限时，$E_1<4200$)，

$$B'_{日}=\left[\left(84-\frac{E_1}{100}\right)\frac{E_1}{100}\right]\frac{100}{185} \qquad (2-153)$$

当在阴历时(即月亮极黄纬小于一象限时，$E_1<7000$)，

$$B'_{日}=\left[\left(140-\frac{E_1}{100}\right)\frac{E_1}{100}\right]\frac{100}{514} \qquad (2-154)$$

式中，E_1 为日食食甚时，日食阳历食限或阴历食限同日月距黄白交点度分值之差。

崇天历求月食泛用分($B'_{月}$)的术文曰：

置望入交前后分(F_1)，退一等，自相乘，交初以九百三十五除，交中以一千一百五十六除之，得数用减刻率(交初以一千一百一十二为刻率，交中以九百为刻率)，各得所求。

依此则有：

在交初时，即定望之际月在黄白交点降交点前后时，

$$B'_{月}=1112-\frac{F_1^2}{93500} \quad (2-155)$$

在交中时，即定望之际月在黄白交点升交点前后时，

$$B'_{月}=900-\frac{F_1^2}{115600} \quad (2-156)$$

式中，F_1 为定望时，月与黄白交点度距的分值。

北宋周琮明天历亦有日月食初亏、复满时刻的算式，其术文依次为①：

求日月食亏初、复满时刻：以定用刻分(D_0)减食甚小余(I')，为亏初小余(C_1)，加食甚[小余]，为复满小余(C_2)。

求日月食定用刻分：置日月食泛用刻分(B')，以一千三百三十七乘之，以所直度下月行定分(A_1)除之，所得为日月食定用刻分(D_0)。

求日食泛用刻分：置阴、阳历食分(E_1)于上，列一千九百五十三于下，以上减下，余以乘上，满二百七十一除之，为日食泛用刻分($B'_{日}$)。

求月食泛用刻分：置去交定分(F_1)，自相乘，交初以四百五十九除，交中以五百四十除之，所得，交初以减二千九百，交中以减三千二百一十五，余为月食泛用刻分($B'_{月}$)。

依术文意，可列出以下诸式：

① 《宋史·律历志八》。

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - D_0 \\ C_2 &= I' + D_0 \\ D_0 &= \frac{1337}{A_1} B' \\ B'_{日} &= \frac{E_1}{271}(1953 - E_1) \end{aligned}\right\} \quad (2-157)$$

在交初时，

$$B'_{月} = 3900 - \frac{F_1^2}{459} \quad (2-158)$$

在交中时，

$$B'_{月} = 3315 - \frac{F_1^2}{540} \quad (2-159)$$

以上各算式自变量的含义，以及算式的函数形式均与上述崇天历各算式相同，只是周琮在求 $B'_{日}$ 时，仅以一式贯之，自然，依 B' 诸式在所得数量上有所不同。

北宋皇居卿观天历计算“求日月食亏初、复满小余”和“求日月食定用分”的方法，与崇天历、明天历也完全相同，而“求日食泛用分”和“求月食泛用分”[①]的术文则稍异，它们分别为：

置日食定分(E_1)，退二位，列于上，在阳历列九十八于下，在阴历列一百五十八于下，各相减、相乘，阳以二百五十而一，阴以六百五十而一，各为日食泛用分($B'_{日}$)。

置望交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，交初以一千一百三十八而一，用减一千二百三，交中以一千二百六十四而一，用减一千八十三，各为月食泛用分($B'_{月}$)。

① 《宋史·律历志十一》。

依此,可列出以下各式:

当在阳历时($E_1<4900$),

$$B'_{日}=\frac{E_1}{25000}\left(98-\frac{E_1}{100}\right) \qquad (2-160)$$

当在阴历时($E_1<7900$),

$$B'_{日}=\frac{E_1}{65000}\left(158-\frac{E_1}{100}\right) \qquad (2-161)$$

当在交初时,

$$B'_{月}=1203-\frac{F_1^2}{113800} \qquad (2-162)$$

当在交中时,

$$B'_{月}=1083-\frac{F_1^2}{126400} \qquad (2-163)$$

以上各式自变量的含义,以及算式函数形式亦均与宋行古算式相同。

北宋姚舜辅纪元历求日月食亏初、复满时刻的术文依次为:[①]

置日、月食甚小余(I'),各以定用分(D_0)减之,为亏初(C_1);加之,为复满(C_2)。

置日、月食泛用分(B'),副之,以食甚加时入转算外损益率(A'_1)乘之,如日法(7290)而一,所得,应朒者依其损益;应朏者,益减、损加其副,即为日食定用分(D_0)。

置交前、后分(F_1),自相乘,退二位,阳历一百九十八而一,阴历三百一十七而一,所得,用减五百八十三,余为日食泛用分($B'_{日}$)。

---

① 《宋史·律历志十三》。

置交前、后分(F_1),自相乘,退二位,如七百四而一,所得,用减六百五十六,余为月食泛用分($B'_{月}$)。

依术文意,可列出以下各式:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - D_0 \\ C_2 &= I' + D_0 \\ D_0 &= B'\left(1 \pm \frac{A'_1}{7290}\right) = \frac{A_1}{1337}B' \end{aligned}\right\} \quad (2-164)$$

当在阳历时($F_1 < 3400$),

$$B'_{日} = 583 - \frac{F_1^2}{19800} \quad (2-165)$$

当在阴历时($F_1 < 4300$),

$$B'_{日} = 583 - \frac{F_1^2}{31700} \quad (2-166)$$

$$B'_{月} = 656 - \frac{F_1^2}{70400} (F_1 < 6800). \quad (2-167)$$

式中各自变量的含义均与上述宋行古崇天历相关算式相同。而 $A_1 = 1337 \pm \frac{A'_1}{7290} \times 1337 = 1337\left(1 \pm \frac{A'_1}{7290}\right)$①,于是 $\frac{A_1}{1337} = \left(1 \pm \frac{A'_1}{7290}\right)$,代入上式可得 $D_0 = \frac{A_1}{1337}B'$。这里 A_1 的含义也与上述宋行古相关算式相同。由之可见,姚舜辅求 D_0 算式的系数乃是宋行古相关算式系数的倒数。姚舜辅求 B' 算式的函数形式亦与宋行古无异,只是求 $B'_{月}$ 时以一式贯之,小有不同。

姚舜辅的这些算式均为南宋诸历法所承用。

金代赵知微重修大明历也载有日月食初亏、复圆时刻算式的

① 陈美东,张培瑜:《月离表初探》,《自然科学史研究》,1987 年,第 2 期。

术文[①]。关于日食初亏、复圆时刻算式，其术曰：

置日食之大分($C'_{日}$)，与三十相减、相乘，又以二千四百五十乘之，如定朔入转算外转定分(A_1)而一，所得，为定用分(D_0)，减定余(I')，为初亏分(C_1)；加定余，为复圆分(C_2)。

依此可得：

$$C_1 = I' - D_0 = I' - \frac{2450}{A_1}(30 - C'_{日})C'_{日} \qquad (2-168)$$

$$C_2 = I' + D_0 = I' + \frac{2450}{A_1}(30 - C'_{日})C'_{日} \qquad (2-169)$$

式中 I' 为食甚小余，A_1 的含义同式(2－143)。关于 $C'_{日}$ 的计算另有术文曰：

视去交前、后定分(E_1)，如二千四百以下，为既前分，以二百四十八除为大分($C'_{日}$)。二千四百以上，覆减五千五百，为既后分，以三百二十除为大分($C'_{日}$)。

依之可得：

当 $E_1 < 2400$ 时，

$$C'_{日} = \frac{E_1}{248} \qquad (2-170)$$

当 $E_1 > 2400$ 时，需以 5500 返减之，

$$C'_{日} = \frac{E_1}{320} \qquad (2-171)$$

① 《金史·历志下》。

式中，E_1 的含义同式(2－153)。

重修大明历关于月食初亏、复圆算式的术文则为：

> 置月食之大分($C'_月$)，与三十五分相减、相乘，又以二千一百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为定用分(D_0)。加减定余(I')，为初亏(C_1)、复圆(C_2)分。
>
> 视去交前、后分(F_1)，一千七百以下者，食甚。以上，覆减五千一百，余以三百四十除为大分($C'_月$)。

依之，可列出以下算式：

$$C_1 = I' - D_0 = I' - \frac{2100}{A_1}(35 - C'_月)C'_月 \qquad (2-172)$$

$$C_2 = I' + D_0 = I' + \frac{2100}{A_1}(35 - C'_月)C'_月 \qquad (2-173)$$

$$C'_月 = \frac{F_1}{340} \qquad (2-174)$$

式中，I'、A_1、F_1 的含义同式(2－151)和式(2－155)，$F_1 <$ 1700，若 $F_1 > 1700$，需以 5100 返减之。

将式(2－170)和式(2－171)分别代入式(2－168)，可得：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - \frac{2450}{A_1}\left(30 - \frac{E_1}{248}\right)\frac{E_1}{248} \\ C_1 &= I' - \frac{2450}{A_1}\left(30 - \frac{E_1}{320}\right)\frac{E_1}{320} \end{aligned}\right\} \qquad (2-175)$$

由上述宋行古和皇居卿的算式，C_1 值亦可示如该二式相同的函数形式(C_2 值的情况也如此)。这就是说赵知微求算日食 C_1、C_2 公式实际上是沿用宋行古、皇居卿算式的函数形式，但对算式的具体描述过程略作变化：宋行古、皇居卿在求 D_0 时不用，而在求 $B'_日$ 时才用先相减、后相乘法，而赵知微在求 D_0 时就先用了先

相减、后相乘法，如此而已。对于月食 D_0 值的计算，赵知微也采用了先相减、后相乘法，这同前述各历法均采用自相乘法是不同的。

元代耶律楚材庚午历所载推求交食初亏、复圆时刻的算式与赵知微重修大明历全同。

三、授时历交食初亏、复圆时刻算式

元代郭守敬等人授时历亦载有求交食初亏等时刻的算法。[①]对于日食而言，其术曰：

> 置日食分秒($C'_日$)，与二十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度(A_1)而一，为定用分(D_0)，以减食甚定分(I')，为初亏(C_1)；加食甚定分，为复圆(C_2)。
>
> 视去交前、后度(F'_1)，各减阴阳历食限(阳历限 6 度，阴历限 8 度)，余如定法(阳历定法 0.6，阴历定法 0.8)而一，各为日食之分秒($C'_日$)。

依此可得：

$$\left.\begin{aligned} C_1 = I' - D_0 = I' - \frac{5740}{A_1}\sqrt{(20 - C'_日)C'_日} \\ C_2 = I' + D_0 = I' + \frac{5740}{A_1}\sqrt{(20 - C'_日)C'_日} \end{aligned}\right\} \qquad (2-176)$$

对于阳历而言，

$$C'_日 = \frac{1}{0.6}(6 - F'_1) \qquad (2-177)$$

① 《元史·历志四》。

对于阴历而言，

$$C'_{日}=\frac{1}{0.8}(8-F'_1) \qquad (2-178)$$

式中 A_1 的含义与式(2－143)相同。F'_1 为日食甚时，日月与黄白交点的度距。

郭守敬等人的授时历还给出了月食初亏和复圆时刻的算法，其术依次为：

> 置月食分秒($C'_{月}$)，与三十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度(A_1)而一，为定用分(D_0)。以减食甚定分(I')为初亏(C_1)；加食甚定分，为复圆(C_2)。
>
> 视去交前、后度(F_1)，用减食限(13.05 度)，余如定法(0.87)而一，为月食之分秒($C'_{月}$)。

依之可得：

$$\left.\begin{aligned}C_1&=I'-D_0=I'-\frac{5740}{A_1}\sqrt{(30-C'_{月})C'_{月}}\\C_2&=I'+D_0=I'+\frac{5740}{A_1}\sqrt{(30-C'_{月})C'_{月}}\end{aligned}\right\} \qquad (2-179)$$

$$C'_{月}=\frac{1}{0.87}(13.05-F_1) \qquad (2-180)$$

式中各自变量的含义与式(2－151)、式(2－155)相同。郭守敬等人的这些算式的函数形式也与前述各算式不同，是一种新颖的函数式。

第十节　月食食既和生光时刻算式

一、崇天历、明天历、观天历月食既带食出入时刻算式

月食食既时刻系指月面被地影完全遮掩的初始时刻，而生光时刻则指月面被地影完全遮掩一段时间后刚刚露出光亮的时刻。在北宋宋行古的崇天历中，最先给出一种推求月食既带食出入的算式，已经涉及对这两种时刻计算的问题，但并未指明，北宋周琮明天历和皇居卿观天历亦如此，一直到北宋姚舜辅纪元历才给出了明确的论述，此后才普遍推广开来。

宋行古在崇天历中给出了一种“求月食既内外刻分”的算式，其术曰：

> 置月食交前、后分(F_1)，覆减三千二百，一百约之，列六十四于下，以上减下，余以乘上，进二位，交初以二百九十三除，交中以三百六十(五)[二]①除，所得，以定用分(D_0)乘之，如泛用分($B'_月$)而一，为月食既内刻分(P_1)，覆减定用分，即既外刻分(P_2)。②

依之可列出下式：

在交初时，

① 设$F_1=0$，令式(2－155)和式(2－156)分别代入式(2－181)和式(2－182)，此时交初的$B'_月$乘以293(1112×293＝325816)应等于交中的$B'_月$乘以365(900×365＝328500)，328500远大于325816，故293或365两数中必有一误。若改365为362，可得900×362＝325800；若改293为295或296，可得295×1112＝328040或296×1112＝329152，三者中以改365为362最为接近，故从改。

② 《宋史·律历志六》。

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{D_0}{B'_{月}} \times \frac{100}{293}\left[64 - \frac{(3200 - F_1)}{100}\right]\frac{(3200 - F_1)}{100} \\
&= \frac{D_0}{293B'_{月}}(10240000 - F_1^2) \qquad (2-181)
\end{aligned}
$$

在交中时，

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{D_0}{B'_{月}} \times \frac{100}{362}\left[64 - \frac{(3200 - F_1)}{100}\right]\frac{(3200 - F_1)}{100} \\
&= \frac{D_0}{362B'_{月}}(10240000 - F_1^2) \qquad (2-182)
\end{aligned}
$$

$$
P_2 = D_0 - P_1 \qquad (2-183)
$$

式中 F_1 为定望时，月与黄白交点度距的分值（下同）。D_0、$B'_{月}$ 可由式（2－152）、式（2－155）和式（2－156）求得。这是一组为推求月食既带食出入而设的算式。以定望时刻减去 P_1，即为月食食既时刻；以定望时刻加上 P_2，即为月食生光时刻。可是，在崇天历中并未明确指出这一点。

北宋周琮在明天历中亦给出一组为推求月食既带食出入而设的算式，其术曰：

> 置月食去交分（F_1），覆减食限三之一（446），余列于上位，乃列三之二（892）于下，以上减下，余以乘上，以一百七十除之，所得，以定用刻分（D_0）乘之，满泛用刻分（$B'_{月}$）除之，为月食既内刻分（P_1）；用减定用刻分，余为既外刻分（P_2）。[①]

依之可得：

① 《宋史・律历志八》。

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{D_0}{170B'_{月}}[892-(446-F_1)](446-F_1)\\&=\frac{D_0}{170B'_{月}}(198916-F_1^2)\\P_2&=D_0-P_1\end{aligned}\right\}\quad(2-184)$$

式中，D_0、$B'_{月}$可由式(2－157)、式(2－158)和式(2－159)求得。

北宋皇居卿观天历为推求月食既带食出入而设的算式的术文为：

> 置月食交前、后分(F_1)，覆减三千七百，退二位，列于上，下列七十四，相减、相乘，进位，如三十七而一，所得，以定用分(D_0)乘之，如泛用分($B'_{月}$)而一，为既内分(P_1)，以减定用分，余为既外分(P_2)。①

依此则有：

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{10D_0}{37B'_{月}}\left[74-\frac{(3700-F_1)}{100}\right](3700-F_1)\\&=\frac{D_0}{370B'_{月}}(13690000-F_1^2)\\P_2&=D_0-P_1\end{aligned}\right\}\quad(2-185)$$

式中，D_0、$B'_{月}$可由式(2－157)、式(2－162)和式(2－163)求得。将式(2－184)和式(2－185)同式(2－181)、式(2－182)比较可知，周琮和皇居卿显然都继承了宋行古算式的形式。而宋行古算式等从表面上看是依循先相减、后相乘法，而实际上则为自相乘法。这是先相减、后相乘法与自相乘法可以互为转换的有趣事例。

① 《宋史・律历志十一》。

二、纪元历、重修大明历、授时历月食食既和生光时刻算式

北宋姚舜辅在纪元历中也给出"求月食既内外分"术：

置月食交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，如二百四十九而一，所得，用减二百三十一，余以定用分(D_0)乘之，如泛用分($B'_月$)而一，为月食既内分(P_1)，用减定用分，余为既外分(P_2)。①

依之可得：

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{D_0}{B'_{月}}\left(231 - \frac{F_1^2}{24900}\right) \\ P_2 &= D_0 - P_1 \end{aligned}\right\} \quad (2-186)$$

式中 D_0、$B'_月$ 可由式(2—164)和式(2—167)求得。这组算式是直接用自相乘法表述的，此法实与宋行古算式的形式无异。姚舜辅不但用 P_1、P_2 于月食既带食出入问题的计算，而且明确用之于计算月食食既和生光时刻的计算，其术曰：

(置月食甚小余 I')，以既内分(P_1)减之，为初既(C_3)；加之，为生光(C_4)。②

依此则有：

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= I' - P_1 \\ C_4 &= I' + P_1 \end{aligned}\right\} \quad (2-187)$$

① 《宋史·律历志十三》。

② 《宋史·律历志十三》。

式中 I' 为月食食甚时刻，可由式(2－70)、式(2－71)、式(2－72)求得。该算法为姚舜辅所创用，并为南宋诸历法所继承。

金代赵知微在重修大明历中给出了新型的、真正以先相减、后相乘法为准的月食食既和生光时刻的算式，并将它们与月食初亏、复圆时刻的计算统一在一起描述，其术文曰：

> 月食既者，以既内大分(F_2)与十五相减、相乘，又以四千二百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为既内分(P_1)。用减定用分(D_0)，为既外分(P_2)。置月食定余(I')，减[去]定用分，为初亏(C_1)；因加既外分，为食既(C_3)；又加既内分，为食甚(I')；再加既内分，为生光(C_4)；复加既外分，为复圆(C_2)。①

依术文意，可列出以下一组算式：

$$\left.\begin{aligned}C_1&=I'-D_0\\C_3&=I'-D_0+P_2=I'-P_1\\I'&=I'-D_0+P_2+P_1=I'\\C_4&=I'-D_0+P'_2+2P_1=I'+P_1\\C_2&=I'-D_0+2P_2+2P_1=I'+P_1+P_2=I'+D_0\end{aligned}\right\}\qquad(2-188)$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{4200}{A_1}(15-F_2)F_2\\P_2&=D_0-P_1\end{aligned}\right\}\qquad(2-189)$$

I'、A_1 的含义同式(2－187)和式(2－143)。而 D_0 的计算另

① 《金史·历志下》。

有术文曰：

置月食之大分($C'_{月}$)，与三十五相减、相乘，又以二千一百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为定用分(D_0)，减定余(I')为初亏分(C_1)；加定余，为复圆分(C_2)。①

依之可得：

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{2100}{A_1}(35-C'_A)C'_A \\ C_1 &= I'-D_0 \\ C_2 &= I'+D_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-190)$$

而求 C'_A 和 F_2 的术文曰：

视去交前、后分(F_1)，一千七百以下，食既；以上，覆减五千一百，余以三百四十除为大分(C'_A)……去交分(F_1)在既限(1700)以下，覆减既限，亦以三百四十除，为既内之大分(F_2)。②

由此可得：

当 $F_1>1700$ 时，需以 5100 返减之(即当入月食限而未入月食既限时)，

$$C'_A=\frac{F_1}{340} \qquad (2-191)$$

当 $F_1<1700$ 时，需以 1700 返减之(即当入月食既限时)，

① 《金史·历志下》。

② 《金史·历志下》。

$$F_2 = \frac{F_1}{340} \tag{2-192}$$

式中 F_1 的含义与式(2－155)相同。

元代耶律楚材庚午历所载求月食初亏、食既、食甚、生光和复圆等时刻的算法与重修大明历全同。

已知月食既限＝月食限－10×月食定法[①]，则元代郭守敬等人授时历所取月食既限应为：13.05－10×0.87＝4.35 度。当 $F_1 < 4.35$ 度时，授时历又给出月食初亏、食既、食甚、生光和复满时刻的算式，其术曰：

> 月食既者，以既内分(应指月食既时的月食分秒 C'_A)与一十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度(A_1)而一，为既内分(P_1)；用减定用分(D_0)，为既外分(P_2)。以定用分减食甚定分(I')，为初亏；加既外(P_2)为食既(C_3)；又加既内(P_1)，为食甚(I')；再加既内，为生光(C_4)；复加既外，为复圆(C_2)。[②]

依术文意，可列出与式(2－188)完全相同的算式，但式中，

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{5740}{A_1}\sqrt{(10-C'_A)C'_A} \\ P_2 &= D_0 - P_1 \\ C'_A &= \frac{1}{0.87}(4.35-F_1) \end{aligned}\right\} \tag{2-193}$$

D_0 可依式(2－190)求得。其他自变量的含义亦与式(2－188)相同。

① 陈美东：《中国古代的月食食限及食分计算法》，《自然科学史研究》，1991 年，第 4 期。

② 《元史·历志四》。

第三章 早期推步历法蠡测

第一节 观象授时与推步制定历法

由于和人类的生产、生活及社会的发展密切相关，所以天文历法是自然科学中发展最早的。初期历法情况如何，因文献无征，已不易详考。

《史记・历书》云：

> 神农以前尚矣。盖黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰馀。于是有天地神祇物类之官，是谓五官。……少皞氏之衰也，九黎乱德，民神杂扰，不可放物，祸灾荐至，莫尽其气。颛顼受之，乃命南正重司天以属神，命火正黎司地以属民，使复旧常，无相侵渎。其后三苗服九黎之德，故二官咸废所职，而闰馀乖次，孟陬殄灭，摄提无纪，历数失序。尧复遂重黎之后不忘旧者，使复典之，而立羲、和之官。明时正度，则阴阳调，风雨节，茂气至，民无夭疫。年耆禅舜，申戒文祖，云“天之历数在尔躬”。舜亦以命禹。由是观之，王者所重也。夏正以正月，殷正以十二月，周正以十一月。盖三王之正若循环，穷则反本。天下有道，则不失纪序；无道，则正朔不行于诸侯。

《史记·历书》是现存最早的历法文献。关于上古历法，太史公在这里只告诉我们，黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰余。颛顼继少皞而有天下，命令南正重、火(北)正黎主管天地事务。后来三苗又效九黎的样子作乱，主管天地的官俱废弃职守，致闰余乖次，历数失序。帝尧时，又起用重黎后人仍守旧业者重掌此事，设立羲、和之官，明时正度。于是阴阳调，风雨节，茂气至，民无夭疫。尧年老禅位于舜，在祖庙告诫他，日月星辰之运行，与民生关系至巨，这责任可在你身上啊。舜禅位禹时也如此教育他。由此可见，历代君王都极重视历法。于夏商周三代，司马迁类似《尚书大传》，记述了有关"三正"的说法，而对远古历法的具体内容，文中却并未涉及。

从出土殷周甲骨卜辞考知，至迟在殷商时期我国已用月有大小、年分平闰的阴阳合历。历法已初具规模和水平。我们在"试论殷代历法的月与月相的关系"中，进一步论证了殷商历法的月是朔望月，历月以新月初现为月首。其时月的开始由观测朏月决定，故月长与朔望月十分相近，月与月相的关系相当明确。

西周文献和铜器铭文中有大量生霸、死霸、朏、既望等月相名称，且其记载总与历日相连。如"九年正月既死霸庚辰"(卫鼎乙)，"十五年五月既生霸壬午"(趞曹鼎)，"十二年三月既望庚寅"(走簋)，等等。周初召诰记有：

> 越若来三月惟丙午朏，越三日戊申，太保朝至于洛，卜宅。厥既得卜，则经营。越三日庚戌，太保以庶殷攻位于洛汭。越五月甲寅，位成。越翼日乙卯，周公朝至于洛，则达观于新域营。越三日丁巳，用牲于郊，牛二。越翼日戊午，乃社于新邑，牛一羊一豕一。越七日甲子，周公乃朝用书，命庶殷，侯甸男邦伯。厥既命殷庶，庶殷丕作。

在一个月之内从丙午到甲子19天，这一大段记事，其纪日顺序完全系之于一个"朏"字。此处之用朏，犹如后世历法的以朔为月首，日序以初一、初二等依次排下去。这清楚表明，至少西周时期还是以新月初现"朏"作为月首，而纪日与月亮观测有密切的关系。要靠月相来确定日序。朔月不可见，只能推算得出。可见殷周历法是根据实测天象决定，而不是事先推步制定的。如斯时已认识朔，历法像后世一样是计算颁行的。这么重视、观测、记录月相就完全是多余和不可理解的了。

出土的殷周甲骨以及西周金文中还未发现与制历有密切关系的"朔"字。在可靠的文献中，最早的"朔"字(作朔日解)出现在《诗·小雅·十月之交》中。这里记载的是公元前8世纪的一次日食，发生的日子是朔日。继后的春秋时代肯定是以朔日作月首了。但直到文公时代(公元前7世纪)，国君仍有告月、告朔等活动，说明其时距开始以朔为月首的时代不会太久。很有可能，中国历法是在西周后期废朏用朔的。

太阳、月亮是人类最早认识的最明亮的天体。太阳出没方位和高度的变化，形成了昼夜长短交替、季节寒来暑往。它又直接关系到作物的种长收藏和人类的生产、生活和社会活动。月亮光度适中，肉眼可以直接观察。人们早就注意到月亮在恒星间的运行。此外，更会观测到月轮有盈亏。月亮从新月(朏)—上弦—望—下弦—残月，逐日之间有着明显的月相变化，且有一定的循环规律，用这个周期来表示一种时间段落是极为自然的。月亮连续两次满轮的时距就是朔望月，即月相变化循环一周的时间。

月亮本身不发光，月相盈亏变化是反射太阳光形成的。月亮迎着太阳的半球被太阳照亮，背着太阳的半球是暗的。月球绕地运行，若走到日地之间，从地球上看，此时日月处在同一经度，叫作朔。该时月亮暗的半球朝向地球，人们看不到它。所以朔只能

靠推算得知。殷人对日出日入尚且有祭，自不可能认识月相成因和日月运行规律，当然更不会计算合朔的时日。通过长期观测月相，掌握了它的变化规律和循环周期，才可能认识并确实得出一个较准确的平均的朔望月来作为月长。到了这个时期，不必依靠观测月相而可事先推算得出平朔，这是科学上的一个进步。历法发展到废朏而用朔作月首，自此进入推步制历的新的历史时期。

在推步制定历法以前，只可能采用以观测日影和某些昏旦星象的南中、伏见推定季节，安排农时，靠目视月相确定月始和日序，依天象而随时调节岁首和年长的历法，这就是《吕氏春秋·贵因》所说的"审天者查列星而知四时"的年代。不论中外，在人类历史上都有这么一个阶段，可能还是一个相当长的时期。通常把这称作观象授时或历法的准备阶段。

殷商、西周历法以及观象授时是历法研究的重要课题。多年来，特别是近几十年，经过学者孜孜探求，在这方面已取得丰硕成果。本书限于篇幅和体例，侧重介绍各制定历的发展、创新和特点，以及历代颁行历法的具体推步。

中国早期推步历法是个什么样子，已很难确知了。本章只能根据文献、文物中的零散材料试作分析和考查。

第二节 《春秋》历日和日食

《春秋》又称《春秋经》，是春秋时期鲁国史官撰写的编年史。《春秋》是其时各国史书的通名。周天子和各大诸侯国都编有这种历史书，但只有这一部鲁国《春秋》留存了下来。它是我国现存最早的一部编年史。

《春秋》记述了自鲁隐公元年（前 722）至哀公十四年（前 481）共 242 年这段历史时期的许多事件，涉及许多诸侯国。同时它又

保存了其时丰富的天文历法资料，如年月四时、历日干支、朔晦闰月、彗孛流陨、日食、星名、视朔告朔、郊社祭祀，等等。本节对春秋日食合历情况试作讨论。

《春秋》242 年中记录了 37 次日食。其中，经文注明是朔日发生的有 28 次(内有一次缺日干支)；有年月日干支，经文未注明是朔日者 7 次；仅记年月(缺日干支又未注朔)者 2 次。除襄公十五年(前 558)八月丁巳日有食之(未注朔)外，后两种情况都集中在鲁成公以前的春秋前半期。

这些日食的考订对于了解春秋历法、年代，以及对于近代天文学的研究(例如，对地球自转不均匀性的研究)都有一定意义。古今很多历算家都对这 37 次日食做过分析考查，限于时代和方法，仍有未尽之处，有的需做修正。为此，我们依据现代天文方法对它们重新做了计算(表 3－1 列出这 37 次日食曲阜的见食情况)并进而计算了自鲁隐公元年(前 722)至哀公十九年(前 476) 247 年间曲阜(鲁国都城)可见的全部日食(见表 3－2)。

计算表明，《春秋》记载的 37 次日食中，有 32 次可认定为其时观测实录。这里又分三种情况：①年月日相符，曲阜可见者 27 次；②经文无纪日干支，年月记载相合，曲阜可见者 2 次；③年月日干支基本相符，据考查年月其一明显记误而曲阜可见者 3 次。如，经文记载，宣公八年七月甲子日有食之既。在整个春秋 247 年中，发生于甲子日的日食仅有 3 次。其中昭八年闰月朔甲子日食，曲阜仅可见食分 0.02，目视无法觉察，当然更谈不到食既。另一次就是经载的襄二十四年七月甲子朔日有食之既。第三次就是宣八年发生于十月甲子朔的大食分日食，食分 0.91。《春秋》所记非此莫属，显系月名七、十古书形近致误。再如，经书宣十七年六月癸卯日有食之。但六月不入食限，无日食发生。这一年有两次中心食，一为五月乙亥朔，一是十一月壬申朔，皆非癸卯，且曲

表 3—1　《春秋》载日食及曲阜见食情况

日食记载			公元前	儒略日	干支	合朔时分	食分	食甚时分	注
隐 三　年	二月己巳		720.2.22	1458496	己巳	8　18	0.47	7　18	
桓 三　年	七月壬辰朔	既	709.7.17	1462659	壬辰	14　34	1.00	15　37	
十七年	十月朔		695.10.10	1467857	庚午	15　0	0.58	15　45	庚午朔
庄 十八年	三月		676.4.15	1474619	壬子	16　3	0.68	17　46	壬子
廿五年	六月辛未朔	鼓	669.5.27	1477218	辛未	10　40	0.88	10　01	
廿六年	十二月癸亥朔		668.11.10	1477750	癸亥	11　18	0.72	10　16	
三十年	九月庚午朔	鼓	664.8.28	1479137	庚午	14　50	0.84	15　36	
僖 五　年	九月戊申朔		655.8.19	1482415	戊申	14　11	0.88	14　52	
十二年	三月庚午		648.4.6	1484837	庚午	16　14	0.26	17　59	
十五年	五月		645.5.2	1485859	壬子				无日食
文 元　年	二月癸亥		626.2.3	1492810	癸亥	12　19	0.79	12　53	
十五年	六月辛丑朔	鼓	612.4.28	1498008	辛丑	7　27	0.87	6　29	
宣 八　年	七月甲子	既	601.9.20	1502171	甲子	15　4	0.91	15　42	十月甲子
十　年	四月丙辰		599.3.6	1502703	丙辰	7　23	(0.50	6　48)、	

续表

日食记载				公元前	儒略日	干支	合朔时分	食分	食甚时分	注
宣	十七年	六月癸卯		602.5.8	1501670	癸卯	7 9	0.43	6 0	宣七年六月癸卯
成	十六年	六月丙寅朔		575.5.9	1511533	丙寅	13 31	0.96	14 35	
	十七年	十二月丁巳朔		574.10.22	1512064	丁巳	9 19	0.66	7 43	
襄	十四年	二月乙未朔		559.1.14	1517262	乙未	14 9	0.65	15 17	
	十五年	八月丁巳		558.5.31	1517764	丁巳	5 53	(0.35	4 57)	七月丁巳
	二十年	十月丙辰朔		553.8.31	1519683	丙辰				日食偏西南曲阜不见
	廿一年	九月庚戌朔		552.8.20	1520037	庚辰	13 54	0.69	14 34	
	廿一年	十月庚辰朔		552.9.19	1520067	庚辰				无日食
	廿三年	二月癸酉朔		550.1.5	1520540	癸酉	10 8	0.91	9 2	
	廿四年	七月甲子朔	既	549.6.19	1521071	甲子	13 16	1.01	13 58	
	廿四年	八月癸巳朔		549.7.18	1521100	癸巳				无日食
	廿七年	十二月乙亥朔		546.10.13	1522282	乙亥	8 49	0.94	7 8	
昭	七 年	四月甲辰朔		535.3.18	1526091	甲辰	13 21	0.35	14 31	
	十五年	六月丁巳朔		527.4.18	1529044	丁巳	11 44	0.93	11 58	

续表

日食记载		公元前	儒略日	干支	合朔时分	食分	食甚时分	注
昭 十七年	六月甲戌朔	525.8.21	1529900	癸酉	16 23	0.82	17 34	九月晦癸酉
廿一年	七月壬午朔	521.6.10	1531289	壬午	10 50	0.62	10 11	
廿二年	十二月癸酉朔	520.11.23	1531820	癸酉	12 1	0.59	11 28	
廿四年	五月乙未朔	518.4.9	1532322	乙未	9 5	0.58	8 16	
卅一年	十二月辛亥朔	511.11.14	1535098	辛亥	10 52	0.53	9 56	
定 五 年	三月辛亥朔	505.2.16	1537018	辛亥	14 3	0.44	15 16	
十二年	十一月丙寅朔	498.9.22	1539793	丙寅	12 5	0.87	11 24	
十五年	八月庚辰朔	495.7.22	1540827	庚辰	12 4	0.51	11 56	
哀 十四年	五月庚申朔	481.4.19	1545847	庚申	12 14	0.82	12 43	

表 3—2　曲阜可见而《春秋》未载的日食

	公元前 年月日	儒略日	干支	合朔时分	曲阜 食分	见食 食甚时分
隐　元　年	722.10.9	1457994	丁未	9　48	0.18	8　12
五　年	718.7.27	1459381	甲寅	15　4	0.27	16　12
七　年	716.6.6	1460061	甲戌	15　19	0.14	16　49
十一年	712.9.18	1461626	己卯	11　17	0.39	9　51
桓　四　年	708.12.31	1463191	甲申	9　4	0.66	7　37
十　年	702.3.5	1465081	甲寅	16　31	(0.60	18　3)
十一年	701.8.17	1465612	乙巳	10　42	0.61	9　36
十五年	697.6.6	1467001	甲寅	6　48	0.45	5　35
十六年	696.5.26	1467355	戊申	8　47	0.00	7　12
庄　九　年	685.3.26	1471312	乙巳	7　51	0.05	7　03
十一年	683.3.5	1472021	甲午	16　26	(0.14	18　4)
十二年	682.8.18	1472552	乙酉	6　44	(0.32	5　23)
十三年	681.1.13	1472700	癸丑	11　39	0.15	11　41

续表

	公元前年月日	儒略日	干支	合朔时分	曲阜食分	见食食甚时分
庄　十四年	680.1.1	1473054	丁未	12　14	0.57	12　11
十五年	679.6.17	1473586	己亥	13　31	0.61	14　27
十六年	678.11.1	1474088	辛酉	12　58	0.03	13　13
十九年	675.4.5	1474974	丁未	8　25	0.65	7　40
廿一年	673.8.8	1475830	癸亥	6　8	(0.11	5　15)
廿八年	666.3.27	1478252	乙酉	8　24	0.72	7　34
僖　元　年	659.11.1	1481028	辛丑	7　50	(0.05	6　32)
二　年	658.10.21	1481382	乙未	10　44	0.38	8　57
三　年	657.4.15	1481559	壬辰	16　9	0.08	17　45
四　年	656.4.5	1481914	丁亥	8　47	0.07	7　48
六　年	654.8.9	1482770	癸卯	6　58	0.33	5　23
七　年	653.2.2	1482947	庚子	8　45	0.94	7　35
九　年	651.6.7	1483803	丙辰	17　00	0.73	18　42

续表

	公元前 年月日	儒略日	干支	合朔时分	曲阜 食分	见食 食甚时分
僖　九　年	651.12.2	1483981	甲寅	8　21	(0.13	7　5)
十三年	647.9.19	1485368	辛酉	10　19	0.31	8　54
十九年	641.11.11	1487613	丙戌	16　15	(0.61	17　15)
廿四年	636.2.23	1489178	辛卯	15　43	0.80	17　40
卅一年	629.4.6	1491777	庚戌	15　33	0.51	17　12
卅二年	628.9.19	1492308	辛丑	7　24	(0.37	5　52)
文　二　年	625.7.19	1493342	乙卯	9　41	0.64	8　20
三　年	624.12.3	1493844	丁丑	15　25	0.14	16　31
五　年	622.5.18	1494375	戊辰	14　15	0.23	15　38
六　年	621.5.7	1494730	癸亥	7　16	0.31	6　23
十二年	615.6.29	1496974	丁亥	5　60	(0.67	4　50)
十三年	614.6.18	1497328	辛巳	10　21	0.09	9　28
十四年	614.12.13	1497506	己卯	13　1	0.92	13　18

续表

	公元前 年月日	儒略日	干支	合朔时分	曲阜 食分	见食 食甚时分
文　十七年	610.9.30	1498893	丙戌	15　50	0.67	16　39
宣　二　年	607.7.30	1499927	庚子	16　30	0.08	17　48
三　年	606.7.19	1500281	甲午	17　11	0.57	18　39
四　年	605.12.3	1500784	丁巳	9　10	0.55	7　41
六　年	604.11.22	1501138	辛亥	10　58	0.07	9　10
六　年	603.5.18	1501315	戊申	14　50	0.55	16　12
九　年	600.9.10	1502526	己未	7　20	(0.81	5　44)
十二年	597.7.9	1503559	壬申	12　33	0.28	13　9
十八年	591.9.30	1505833	丙寅	16　40	0.16	17　29
成　九　年	582.3.28	1508934	丁未	12　40	0.25	14　6
十　年	581.3.16	1509288	辛丑	14　36	0.19	16　1
襄　元　年	572.3.7	1512566	己卯	11　13	0.86	11　17
二　年	571.8.21	1513098	辛未	6　39	(0.06	5　27)

续表

	公元前年月日	儒略日	干支	合朔时分	曲阜食分	见食食甚时分
襄 三 年	570.8.10	1513452	乙丑	6 44	(0.43	5 17)
十三年	560.7.20	1517084	丁酉	7 31	0.37	5 54
廿六年	547.10.23	1521927	庚辰	17 6	(0.51	17 35)
卅一年	542.7.31	1523669	壬午	14 50	0.13	15 32
昭 八 年	533.1.27	1526771	甲子	10 30	0.02	10 08
卅二年	510.5.10	1535275	戊申	15 2	0.04	16 50
定 七 年	503.6.21	1537874	丁卯	17 54	0.80	19 20
九 年	501.11.23	1538760	癸丑	12 40	0.25	12 27
十三年	497.9.10	1540147	庚申	16 20	0.21	17 18
十四年	496.2.6	1540296	己丑	10 2	0.87	9 17
哀 三 年	492.11.14	1542038	辛卯	11 7	0.26	9 45
七 年	488.9.1	1543425	戊戌	13 46	0.39	13 51
十九年	476.7.22	1547766	庚申	9 58	0.36	8 31

阜均不可见，显然史载有误。整个春秋 247 年，只有两次曲阜可见日食发生在癸卯日。一为僖六年九月，食分 0.33，一为宣七年六月，食分 0.43。前者，公、年、月名皆不合；后者时代为宣公，又合六月，仅年数相差 10 年。前代学者已指出可能为宣七年六月癸卯日食误置，即经文“十七年”中，“十”字衍。由上看来，此说应该是可信的。襄十四年二月朔乙未（前 559 年 1 月 14 日）距十五年八月丁巳（前 558 年 5 月 31 日）17 个朔望月（502 日）。计算表明，这是两次确切的曲阜发生日食的日子。阴阳历中，平年 12 月、闰年 13 月，绝不会一年只有 10 或 11 个月。所以不论丁巳日食发生在朔还是在晦，总之绝不可能在八月。所以“八月丁巳”中的“八”字，肯定是错了。根据我们或者王韬复原的春秋长历，襄十五年七月丁巳朔确有日食可见。故可认定，经书“八月丁巳”乃“七月丁巳”之误。

《春秋》37 次日食中，可以认定，僖十五年五月、襄二十一年十月庚辰朔、襄二十四年八月癸巳朔，这三次经载日食是错误的。《春秋》书襄二十一、二十四年两次比月而食。襄二十一年九月庚戌朔和二十四年七月甲子朔两次日食皆为中心食，曲阜分别可见七分食和日全食。食时日月距交仅有 7°和 1°。而下一次合朔距交俱已远出食限之外，不可能再发生日食。《春秋》误载有可能是因为错简，但更可能是这两次日食所记因建正各异而月份不同，史官两说并存所致。在春秋时期 247 年中，曲阜可见庚辰日食共有两次，一为《春秋》所记定十五年八月庚辰朔日食；另一为襄二十六年十二月庚辰朔曲阜可见的日带食没。后者经文失载，虽然年月与庚辰比月食俱不相合，但相距不远，以错简误置或可勉强解释。可是，在这 247 年中，曲阜不可能看到一次日食出现在癸巳日。因此，用错简怎样也解释不清襄二十四年八月癸巳朔这次日食。前贤大都把它视作文十一年八月癸巳日食的误置。其实

这是时代限制,计算不够准确所致的差错。这次日食在当时鲁都曲阜乃至整个中国都看不到。

僖十五年五月日有食之。这一年有三次日偏食,但皆不值五月,五月不入食限。经计算,这三次日食曲阜均不可见。故《春秋》的记载是不对的。春秋十二公中,隐闵二公外,皆有十五年。文、昭十五年六月、襄十五年七月、定十五年八月都有日食记载,不可能在五月还有别的可见的日食了。由表3—2看出,僖、宣、成、哀四公十五年俱无日食可见,只桓十五年六月甲寅朔、庄十五年六月己亥朔两次日食可见,而经文未载。僖十五年五月日食未书朔晦,不能排除这次日食是桓、庄之事错编在僖公的可能性。也许还有另一种可能,日食确属僖公,但年份有误或年月皆误。由表3—2知,这样就可有多种选择的余地。总之,这次日食记载残缺较多,很难认定。

襄二十年十月丙辰朔和昭十七年六月甲戌朔两次日食的证认存在一些问题。前者是一次日环食,食时距交仅1°,但发生在纬度偏南的地区,曲阜看不到它。经文所书只能理解是根据传闻。昭十七年六月并非甲戌朔,也不入食限。依作者排定历谱,是年十月甲戌朔,九月晦癸酉有大食分日食。似应为这次日食之误记。但何以月日皆误。有人认为是预报,似未尽妥。作者认为虽不能完全排除隐七年六月甲戌朔日食误置于此的可能性,但由表3—2可知,是食食分甚浅,比较勉强。

综上所述,《春秋》37次日食中,有32次可以认定是其时的观测实录,有3次记载失误,襄二十年十月丙辰朔日食是据别国传闻,昭十七年六月甲戌朔日食乃九月晦癸酉日食之误。

这33次确实可靠的日食记录中(昭十七年九月癸酉日食计入):

食分大于0.80者14次,为42.4%;

食分大于0.90者7次,为21.2%;

食分大于 0.50 者 27 次，为 81.8%；

食分小于 0.50 者 6 次，仅占 18.2%。

也就是说，《春秋》所书悉为三分以上的日食（仅僖十二年三月庚午日食食分为 0.26，比三分略小），绝大多数（81.8%）都是五分以上的大食。

自鲁隐公元年至哀公十九年 247 年中，曲阜可见的日食共 98 次。经载 33 次（昭十七年九月癸酉食计入）外，另有 65 次失记。《春秋》未载的 65 次日食中：

食分大于 0.90 者 2 次；

食分大于 0.80 者 7 次；

食分大于 0.50 者 24 次，小于 0.50 者 41 次；

食分大于 0.30 者 29 次，小于 0.30 者 36 次。

气象因素可能是《春秋》失载的主要原因。但由以上分析看出，78%的九分大食，67%的八分食，五分以上大食的 53%，《春秋》皆有记载。而五分以下日食的 87%，特别是三分以下的小日食，除上述僖十二年三月庚午食分 0.26 这一次外，《春秋》皆未著录。说明其时比较注重大食分日食的发生。史官所书悉为较大的日食，三分以下的不记。

以上考查得出的 32 次观测实记日食中，有 24 次经书发生于其时历法的朔日。这与汉志、续汉志著录的两汉日食多发生在晦或晦前一日的情况明显不同。说明春秋鲁国的历法，朔实相当准确，月相基本合天。作者据春秋历日朔晦复原的春秋历谱，《春秋》未注朔日的另外 8 次日食实录，也都发生于鲁国历法的朔日。春秋鲁历岁首建正尚不完全固定，中后期虽基本建子，仍时有摆动，而朔望大致合天，比较精确。

第三节 《左传》历日和杜预《春秋长历》

《春秋》文义隐晦，记事简短，不易看懂。稍后的人对它做了注解。解经的书共有三种，通称春秋三传（公羊、谷梁、左氏传）。其中《左传》增加了大量史实来解说春秋，文字简洁生动，在文学史、史学史上都有很高的价值。《左传》中也记有大量历日干支和朔闰晦资料。它们中有一些与经文相同，但有许多是《春秋》中所没有的。尤其对考查历日制度非常重要的朔晦闰记载，比经文就多出二十余条。历代学者利用《春秋》、《左传》所记这些朔晦闰和历日干支，研究春秋历法，取得很大成功，恢复了接近其时历法真相的长历。这为后人阅读《春秋》、《左传》，研究先秦历史带来了极大的方便。

杜预根据《春秋》记载的393个、《左传》的386个历日干支及《春秋》34个有甲乙的日食，考校春秋历日，成《春秋长历》一书。因春秋历“数术绝灭”，其前已有多位学者，各据其学，推算春秋历日。《春秋长历》书成，杜预用长历及古今各历以验春秋，得出，在研究春秋历法的诸儒中，刘歆所造的三统历，《春秋》34次有甲乙的日食中仅得一食，其术最疏。而自古以来，诸论春秋者多违谬，或造家术，或用黄帝以来诸历，以推经传朔日，皆不谐合。只有晋泰始历（即魏景初历）和依杜预历论由历算家李修、卜显撰成的乾度历较合。而杜预长历在春秋经传779个历日干支中有746个相合，34个有甲乙的日食中33个与长历一致。所失的33个历日中，杜预认为全是经误或传误。他的考查结果如下：

黄帝历得466日，1食；

颛顼历得509日，8食；

夏历得536日，14食；

真夏历得466日,1食;

殷历得503日,13食;

周历得506日,13食;

真周历得485日,1食;

鲁历得529日,13食;

三统历得484日,1食;

乾象历得495日,7食;

泰始历得510日,19食;

乾度历得538日,19食。

今长历得746日,33食,失33日,经、传误。所失4食,3无甲子。

不能否认,《春秋》、《左传》历日干支确有差错、失误、不相容之处。由以上考查看出,《春秋》、《左传》历日中有95.8%合杜预长历,不合者仅占4.2%,从这个角度讲,《春秋长历》是相当成功的。杜预本人在批评其他学者研究春秋历法无异削人足度己迹时,谈了他认为应该遵循的方法。他说,春秋历法"虽数术绝灭,远寻经传微旨,大量可知,时之违谬,则经传有验。学者固当曲循经传月日、日食,以考晦朔,以推时验;而皆不然,各据其学,以推春秋,此无异于度已之迹,而欲削他人之足也"。

《春秋长历》是否就是春秋时期实行的历法呢?现在可以肯定地说,并非如此。杜预长历在历法上存在一些不足之处,但最主要的还不是这个问题。而是杜预把《春秋》、《左传》等量齐观了。汉晋时期,学者都认为《左传》是与孔子同时的鲁国史官左丘明撰写的。如《史记》就明确讲,"丘明因孔子史记具论其语,成《左氏春秋》"。斯时学者把《春秋》、《左传》视为表里,相得而成。由于时代限制,杜预没有认识到需要对《左传》的历日进行考查。而这一点恰恰成了《春秋长历》并非春秋鲁国实行历法的关键问题。清王韬对杜预及历代治春秋历诸家有全面评价,比较中肯。

他在《春秋朔闰日至考·与湛约翰书》说：

> 自来治春秋历学者，如晋杜元凯之长历，唐僧一行之开元大衍历，我朝陈泗源（名厚耀，以算学闻）之春秋长历，顾震沧之朔闰表，姚文田之春秋经传朔闰表，皆其彰明较著者也。寂居海外，典籍无多，不足以资佐证。陈历韬未之见。杜历虽经散佚，而近已搜集于永乐大典中，辑为完书。其余则尚存什一于孔冲远正义、赵东山属辞中。韬但就所有者而参稽之。窃谓此数君子者，咸未能探求其故矣。大衍历虽循古术，而于经传多违戾。元凯、震沧未明历算，只就经传上下日月推排干支，遇有窒碍，则置闰以通之。委曲迁就，其弊得失参半。杜之弊在徇传，不以为传误而反谓经误。顾氏虽时能矫杜之失，而用心弥勤，差之愈远。须知不由推步则无从知其失闰。必先以今准古，而后古术之疏乃见，失闰之故可明。徐文定公曰，熔西人之巧算，入大统之型模。斯可以得春秋经传之日月矣。

王韬在这里明确指出了，杜预长历的缺点在于曲从《左传》，每遇窒碍，不以为传误，反说经误。并指出研究春秋历法，必先以今准古。用现代方法推步至朔，考校古历之密疏，方能得出正确的春秋经传历日。他的意见和方法都是很正确的。

《春秋》记载了393个历日干支，其中有4条朔晦，另有2次闰月。37次日食中，上节考查指出有32次为其时的观测记录。其中23次经文明书发生于斯时历法的朔日。这些历日朔闰，皆为鲁国史官所记，研究春秋鲁国历法，这些是最基本的材料。

《左传》记有386个历日干支，内19朔晦，另有8个闰月。《春

秋》37 日食中，27 次无传。有传的 10 次内，9 条注朔，8 有朔日干支。386 历日干支，多为左传所新增；27 朔晦闰中，除文六年闰月外，皆为《左传》所特有。此外，《左传》中还记有两次日南至日期及许多关于岁星运行、位置、昏旦星象、分至启闭、星名星次、年中闰月等方面的天文历法资料。而它们在《春秋》经文中却都是没有的。这些新增的天文历法内容是不是《左传》作者收集的春秋史料中原有的；《左传》采用的史料涉及好多诸侯国，当时各国历法是否统一；《左传》特有的历日朔闰是不是鲁国的资料，如果不是，有没有经过作者的处理、换算，“追而正之”，等等。这几个问题是讨论春秋历法必须首先要搞清楚的。换句话说，研究春秋历法，搞清经、传历日的异同是很必要的。

第四节 《春秋》《左传》历日分析

一、《左传》杂采各国史册、经传历日常有参差

幽厉之后，平王东迁，周室微弱，陪臣执政，正朔不行于诸侯，列国各自颁历。《左传》作者所收集的史料来自各诸侯国。这可能是经传月日常有参差的主要原因。有的学者认为“晋用夏正”，经文所书晋事，往往与传相差两月。但细查经传，有差两月者，有差一月者，也有经传相同的。如僖十五年经言，“十有一月壬戌，晋侯及秦伯战于韩，获晋侯”，传书“九月”“壬戌”，差两月。斯年鲁历建丑，则晋历似应建卯。成十八年经说，“正月，晋杀其大夫胥童”，传事在成十七年闰月乙卯晦，差一月。同年，经接下来记载的正月“庚申，晋弑其君州蒲”，又与传书晋弑厉公的日期相同。除晋国外，学者言齐、秦、楚与鲁建正也不相同。但诸国的史事月日也都存在类似情况。如经襄十九年“秋七月辛卯，齐侯环卒”，传作“夏五月壬辰晦”，差两个月，又迟一日。经文十四年书“九月

甲申……齐公子商人弑其君舍"，传言"秋七月乙卯夜，齐商人杀舍"，差两个月，但七月无乙卯，传书月日有误。宣十年经云，"夏四月己巳，齐侯元卒"。传书"夏，齐惠公卒"。又为同月，如齐用夏正、殷正，则不当为"夏"。齐杀其大夫国佐，经书成十八年正月，传作正月甲申晦，所书齐事，经传月皆相同。再如，楚昭王救陈死于军中，经传皆作哀公六年秋七月庚寅，月日相同。学者们认为鲁行周正，但周鲁月日也时有差异。如"王子猛(周悼王，景王子)卒"，经言昭二十二年冬十月，传书"十一月乙酉，王子猛卒"，相差一月。经传月日，多似上举数例，时异时同。且无规律可循。有的学者认为，"其经传相同者，则传追而正之也"。为何有时追而正之，有时又不行追改；何时追正，又何时传仍其旧，令人无所适从。另一方面，由以上数例及经传月日，似可看出，晋、齐、秦诸历建正迟于鲁历，但并非皆差两月。而鲁历岁首僖公以前多建丑，文公以后常建子，且时有摆动，因此也很难得出春秋晋、齐、秦皆用夏正(建寅)的确切结论。很可能与鲁历类似，春秋各国历法岁首的建正也处于稳定前的演变之中。

二、《左传》所载日食，说法矛盾多端

(一)襄二十七年日食辰不在申、未再失闰

《左传》说，襄二十七年十一月乙亥朔，日有食之。辰在申，司历过也，再失闰矣。意思是，这次日食发生在斗柄建申的月份(夏正七月，周正九月)，其时鲁历已失二闰。

现代计算表明(表3－1)，此食曲阜见食0.94，是一次呈现昼晦、不尽如勾的罕见食象。日食时太阳位于氐宿，黄经193°.3，为秋分后一月，斗柄建戌，而非建申。建申之月朔日丙子，不入食限。《左传》云"辰在申"，显非实记。

襄二十七年十一月乙亥朔，昭七年四月甲辰朔两次日食有

传。它们相距10年零5个月，计129月或3809日。说明当时的历法这10年中设了4闰，是正常的置闰比率。而据《左传》，如襄二十七年日食时日食已失两闰，那么昭七年四月日食时应仍失两闰。根据计算可知，昭七年四月甲辰朔日食时太阳位于奎宿，黄经351°.2，为春分斗柄建卯之月，正合周正建子四月，并不失闰。也证传言“辰在申”、“再失闰”说法不准确。

（二）昭十七年六月朔并非甲戌，九月晦癸酉日食不当夏正四月

《春秋》37次日食中，传有记载者10次。桓十七年十月朔日食，传言“不书日，官失之也”。僖十五年五月日食，传谓“不书朔与日，官失之也”。庄二十五年六月辛未朔、庄三十年九月庚午朔、文十五年六月辛丑朔3次日食，经文皆书“鼓，用牲于社”。庄三十年日食无传，庄二十五年日食，传称“非常也”，文十五年日食传云“非礼也”。意思是说，日有食之，天子不举，伐鼓于社；诸侯应用币于社，伐鼓于朝。鲁公僭行天子之礼为非礼、非常之举。襄二十七年日食，《左传》主要指出鲁历“辰在申”、“再失闰”。昭七、二十一、二十四、三十一年4次日食，《左传》侧重记述了有关星占方面的内容。昭十七年六月甲戌朔日食，传文记载了是否应该伐鼓用币的一段对话，是基于食月位当日过分而未至而发的。襄、昭6次日食，《左传》皆指明食时太阳的位置或所当之分至前后、斗柄指向。传文记下了许多天文历法方面的新资料、新内容，如斗建、分野、分至、星名等。但同时也可看出，《左传》选择这10次日食，是作者有感而发，并非实历或收集到新的史料。如，僖十五年五月不入食限，整个这一年也无曲阜可见的日食发生，为《春秋》误记。《左传》选中这一次，从经而误，已可说明问题。但，昭十七年六月甲戌朔日食更值得研究。《左传》是如此记载这次日食的：

夏，六月甲戌朔，日有食之。祝史请所用币，昭子曰："日有食之，天子不举，伐鼓于社；诸侯用币于社，伐鼓于朝，礼也。"平子御之曰："止也。唯正月朔，慝未作，日有食之，于是乎有伐鼓用币，礼也。其余则否。"太史曰："在此月也。日过分而未至，三辰有灾，于是乎百官降物，君不举，辟移时，乐奏鼓，祝用币，史用辞。故夏书曰：'辰不集于房，瞽奏鼓，啬夫驰，庶人走。'此月朔之谓也。当夏四月，是谓孟夏。"平子弗从。

这一段话在天文上的作用非常重要。目前大家说的最早的日食记录是仲康日食。而它最原始的出处，就是此《左传》所引夏书"辰不集于房，瞽奏鼓，啬夫驰，庶人走"这 14 个字。当然，句中未提"仲康"、"日食"。关于仲康日食文献记载的演变，不是本节的主题，此处只能从略。《左传》这里明确提到分至，用太阳位置日过分而未至作为纪月的依据。称日过分而未至之月为夏四月，辰、三辰、房之名称以及孟仲季的使用等也都是经文中所没有的。尽管如此，我们仍认为《左传》记载的这一段对话，从史实角度是极为可疑的。

首先要分辨，这段对话是在日食发生之前，还是以后进行的。根据传文，似应为日食发生之后。前已指出，昭十七年六月朔日虽合"日过分而未至"，当夏四月、孟夏之月，但既非甲戌，也不入食限，没有日食。这年鲁历九月晦癸酉入食限，曲阜可见八分大食，食时太阳黄经为 141°.7，当夏至后二月，秋分前一月朔日。为日过至而未分(秋分)，或可称孟秋之月，既非孟夏，又不合"日过分而未至"。所以昭十七年六月朔不会有这段对话。

其次，整个春秋时期，只有一次六月甲戌朔日食。它发生于隐公七年(前 716)殷正六月，曲阜仅可见食分 0.14。食时太阳黄

经 66°.8，为仲夏（含夏至之月）月朔。它既不是孟夏之月，又与昭公、季平子所处时代不合。《左传》所记季平子与太史的对话，当然也不会早到隐公时代。

由于六月无食，于是有的学者认为这是一次日食预报。对话是在六月朔日食之前，只是因为预报不准，日食未予应验而已。这种说法恐怕也很难成立。视春秋襄昭已识日食推算之法，根据不足，这且不谈。成襄以后日食皆发生于其时历法的朔日（仅襄十五年经失书朔）。春秋鲁国已行推步历法，这是史实，学术界毫无疑议。斯时颁历就是颁朔。日食皆发生于朔日，说明鲁历步朔已相当准确。春秋历法是阴阳合历，回归年、朔望月长度不能为日整除，历年、历月只能取与此相近的整数。推步历法有其内在的规律，不是可以任意安排的。考《春秋》历日知，昭十七年六月鲁历丙子朔，不是甲戌。《左传》书昭十二年十月壬申朔，"原舆人逐绞，而立公子跪寻"。由此得出《左传》昭十七年六月朔应为乙亥而不可能得甲戌。昭二十一年七月壬午朔日食有传。如昭十七年六月朔为甲戌，则昭二十一年七月朔不会是壬午，而是庚辰或辛巳。由此可知，鲁历所颁六月并非甲戌朔，它也与《左传》所记前后的历日抵触。六月无食。昭十七年癸酉日食既非夏正四月，又与"日过分而未至"的位置正好相反。平子与大史的对话又不可能早到隐公时代。不论是食前还是食后，昭公十七年都不可能有这段对话。只能理解为《左传》作者并未亲历，也没有收集到其他新材料，不识《春秋》误载，沿袭其误而空发的一段议论。

三、《左传》所记日至朔闰常与鲁历不合，并大多失天

《左传》解经增加了大量文字和史实。这有两种情况。一是《春秋》原有的，因记事简短，《左传》补充材料并详加解说；另一是《左传》新增了大量史实，而在《春秋经》原文中是没有的，即"无经

之传”。《左传》新增的史实、材料，对于研究上古三代历史具有极高的价值，史家早有定论。下面仅对《左传》新加的日至、朔闰等历日、天文资料试作分析、讨论。

（一）《左传》两次日南至记载都与鲁历不侔

昭二十年（前522）《左传》记有“二月己丑日南至”及“六月晦丁巳”、“七月朔戊午”和“闰月”。既然二月初一为己丑，就不可能七月戊午朔（己丑为初二、初三就更不对了），除非二、三、四、五、六这5个月中有4个月连大。而对于平朔推步，这是绝不会出现的。这年后面有闰月，当然更不会有别的年中闰，故己丑也不会是二月晦。传书“六月丁巳晦”、“七月戊午朔”，不会晦朔干支皆误。由此看出，《左传》新增二月己丑日南至纪事与传书同年历朔已互相抵牾，和春秋鲁国的历日就更不相侔了。如由昭二十年二月己丑日南至，则一定得不到二十一年七月壬午朔。而经书是月壬午朔日有食之。由前节考订，它是确实的观测实录。

同样，不难证明，《左传》僖公五年（前655）所记“正月辛亥朔日南至”，与其前后的经载历日也很难相接。如：

经书“庄二十五年六月辛未朔”与传言“僖公五年正月辛亥朔”；

传谓僖五年“正月辛亥朔”与经载僖五年“九月戊申朔”、僖十五年“十月庚辰朔”、僖二十二年“十一月己巳朔”及文十五年“六月辛丑朔”；等等。

可见，《左传》所记僖五年正月辛亥朔和昭二十年二月己丑两次日南至，恐怕皆非其时鲁国的观测实记。

（二）《春秋》书朔晦都较合天，《左传》新增多为先天

《春秋》37次日食中，32次为观测实记，内24次经书发生于

其时历法的朔日。作者据《春秋》历朔复原鲁国历法得出，其余 8 次很可能也都当鲁历朔日，而只是《春秋》失书而已。

日食之外，经文还记载了 4 条朔晦干支。它们是：僖十五年九月己卯晦（十月庚辰朔）；僖十六年正月戊申朔；二十二年十一月己巳朔和成十六年六月甲午晦（七月乙未朔）。经计算校核，除僖二十二年十一月己巳朔历稍后天（实朔在戊辰日 21^h31^m）[①]外，皆与天相合。

因此，由经书日食、朔晦考知，鲁国历法月相基本合天，步朔相当准确。

《左传》新增朔晦干支 19 条。内有两个晦朔相连，故可得出完整独立的朔日 17 事。加上昭二十年二月己丑日南至，传虽未书朔，但由前分析可知，己丑只能为二月朔日。这样共得 18 朔日。18 朔日中除僖、昭日南至外，所书都是周晋齐或其他诸侯国如郑宋卫吴的史事。要考查它们的合天情况，殊非易事。因为《左传》收集的他国史实，《春秋》未载或失书月日者，无法判断其历日是否经作者的追改。我们先以春秋鲁历的历月来考查，其中僖二十四年四月、襄二十七年六月、昭二十年七月历朔经传相差一月，干支不接。因学者称晋齐秦诸国行夏正，而《左传》朔日多先天。这三个历朔均由鲁历移后一月。由此得出，《左传》这 18 朔日中，10 条先天一日，8 条与天相合。

《左传》新增 18 朔日中，下列五例可以考查认定其与鲁历之间的关系。

①僖五年正月辛亥朔日南至。

②昭二十年二月己丑（朔）日南至。这两条"日南至"，经文未载，为《左传》所增，记鲁国之事，当用鲁历。

① 本书中 h、m、s 分别表示时、分、秒。

③僖五年传书“十二月丙子朔晋灭虢……执虞公”。经作“冬，晋人执虞公”。如晋用夏正、殷正，则经应记为六年春。由此可证，“十二月丙子朔”为鲁历。

④传谓襄十九年“夏五月壬辰晦，齐灵公卒，庄公即位。”经云“秋七月辛卯，齐环侯卒”。经书七月而传作五月，与鲁历相差两月。

⑤襄三十年传载“二月癸未，晋悼夫人食舆人之城杞者”。绛县老人称，臣生之岁，正月甲子朔，迄今已历444个甲子周期又20日。即“二月癸未”前26660天之甲子日。襄三十年二月癸未为公元前543年2月7日，儒略日为1523130。其前26660天为公元前616年2月11日甲子，儒略日1496471，当鲁文公十一年。《左传》这里所说的“正月甲子朔”，指斯年晋历建寅正月。因据《春秋》历日可知，文十一年鲁国正月建子，相差两月。

《左传》所记以上这五个历朔干支，其正月斗柄所建皆可考订。故可得出它们所对应的儒略历年月日期和儒略日数(JD)。用现代天文方法，计算与这五个朔日相应的实朔日期、干支、时刻。结果表明，除襄十九年五月壬辰晦(六月癸巳朔)与天相合外，《左传》所书其他4例并皆先天1日。

此外，传书文元年“五月辛酉朔，晋师围戚”。所云为晋历，还是鲁历不易判定。但，斯年不论周正、夏正五月实朔皆为壬戌。传谓“五月辛酉朔”，晋历也好，鲁历也罢，均先天1日。

以上《左传》所书6例朔日中，5例先天1日，1例与天相合。虽然它们仅占18历朔之1/3，但由此说明，《左传》所记晦朔，先天者占有一定比例。而经载观测实记的24次朔日日食全部合天，所书4朔晦干支，仅僖二十二年十一月己巳朔一例稍有后天，余皆与天相合。上述传书6例，经载4例朔日干支合天情况刊于表3－3。

表 3—3 《春秋》《左传》所书朔日合天情况考查

朔日	实　朔(公元前)	合失天
《经》 僖十五年十月庚辰	645 年 9 月 27 日庚辰 0:47	合天
十六年正月戊申	645 年 12 月 24 日戊申 12:51	合天
廿二年十一月己巳	638 年 10 月 9 日戊辰 21:31	后天
成十六年七月乙未	575 年 6 月 7 日乙未 22:12	合天
《传》 僖五年正月辛亥	656 年 12 月 26 日壬子 19:26	先天 1 日
五年十二月丙子	655 年 11 月 16 日丁丑 2:40	先天 1 日
文元年五月辛酉	626 年 4 月 3 日壬戌 20:20	先天 1 日
	6 月 2 日壬戌 2:10	先天 1 日
文十一年正月甲子	616 年 2 月 12 日乙丑 7:13	先天 1 日
襄十九年六月癸巳	554 年 6 月 15 日癸巳 13:30	合天
昭二十年二月己丑	523 年 12 月 26 日庚寅 13:16	先天 1 日

在《左传》解说的日食中，昭十七年日食传书发生于“日过分而未至”的“夏四月”朔日甲戌，而是月实朔前 525 年 4 月 25 日乙亥，传先天 1 日。襄二十七年乙亥日食，传言其月“辰在申”。斯年申月实朔丙子(公元前 546 年 8 月 15 日)，传也有 1 日先天。结合上考 6 例朔晦中，5 例先天。可见，与《春秋》历日基本合天不同，《左传》历日总的说来是先天的。与《春秋经》不是一个系统。似不宜视作《左传》撰者收集鲁国史料中原有的，即新增的朔闰并非春秋鲁国的历日。

西汉太初历施行期间，《汉书·五行志》所记其时日食绝大多数发生于历法的晦日。可知是时历法后天约为 1 日。《汉书·律历志·世经》中刘歆用三统历推得，僖五年正月辛亥朔、十二月丙子朔、襄二十七年九月乙亥朔(因再失闰，传书十一月)、昭十七年六月甲戌朔、昭二十年正月己丑朔(失一闰、传言二月)，等等，都

与《左传》说法完全相同。三统四分之法，300 年朔差 1 日。公元前 1 世纪时三统历后天 1 日，那么用三统历推算 600 年前(前 7 世纪)的历日，一定会先天 1 日，这与《左传》所增历日先天情况基本相符。也就是说，《左传》历日的失天情况与汉志世经用三统历推得的大致相同。说明《左传》历日与周历、三统历有着某种关系。

四、文公元年闰三月子虚乌有

《左传》共记有 9 个闰月。它们是：僖七年，文元年、六年，成十七年，襄九年，昭二十年、二十二年，哀十五、二十四年。《春秋》止于哀公十六年(前 479)“夏四月己丑，孔丘卒”。哀二十四年闰月已在经文纪事之外，暂不讨论它。

《春秋》纪事自隐公元年至哀公十六年 244 年较 13 章少 3 年。依 19 年 7 闰章法当设 90 闰。考《春秋》历日 244 年中，鲁历共设了 89 个闰月。较正常闰率少置 1 闰，岁首应前移 1 月。故春秋早期鲁历多建丑，后期多建子。这段时期中《左传》所记 8 个闰月不足鲁历实设的 1/11。而经文仅记载 2 个闰月。文六年闰月经传同；哀五年经云“闰月，葬齐景公”，无传。《左传》8 个闰月中，襄九年“闰月”，学者们认为可能是“门五日”(攻打了五日)之误。除文元年传书“闰三月”外，其余都仅记为“闰月”。其中，文六年，成十七年和昭二十二年，传文明确说明为年终闰月(闰十二月)；僖七年、哀十五年两闰月都在冬季失书月份的记事之后，似也应视作岁终之闰月。只有昭二十年的闰月，《左传》把它夹在八月和十月的纪事之中。按理当视为年中闰月。即，《左传》似有两个春秋历法年中闰月的证据。

《左传》记春秋历法时有失闰，如昭二十年二月己丑日南至，失一闰。甚者与天有差至二三月者，如襄二十七年戌月日食，传书“辰在申”、“再失闰”。哀十二年“冬十二月螽。季孙问诸仲尼。

仲尼曰，丘闻之，火伏而后蛰者毕。今火犹西流，司历过也。”螽为蝗灾。多发生在夏秋之交。定哀时期，约当夏至小暑昏时大火南中，寒露后昏时下没。夏正孟秋、仲秋日没时，斗柄建西南的申酉方向，大火呈现于西方天空。当左传所说的“火犹西流”。鲁历十二月斗柄建亥，为含今小雪中气的夏正十月，仍蝗飞蔽空，落地如雨成灾，说明气象极为反常。《左传》于此，增季孙、孔子的一段问答对话，目的是指出，斯年鲁历又再失闰了。据《春秋》历日考查，与襄二十七年日食“辰在申”类似，《左传》所言并非鲁历事实。这个问题暂不讨论。以上数例说明，既然春秋历法时有失闰，岁首常有摆动，月名时节多有参差，那么有何必要，是时又依据什么办法来安排年中闰月呢？与《左传》所书文元年“闰三月”不同，昭二十年之闰未注明闰八月还是闰九月。这种体例不一，也很令人生疑。

昭二十年经文记载了四件事：夏，曹公孙会自鄸出奔宋；秋，盗杀卫侯之兄絷；冬十月，宋华亥、向宁、华定出奔陈；十有一月辛卯蔡侯庐卒。首尾两事无传。第三件事记宋国华氏、向氏之乱，第二件，卫国动乱，《左传》记述得都比较详细。昭公二十年，《左传》写了许多大事，诸如，二月己丑日南至；楚平王听信费无极谗言杀伍奢、伍尚，尚弟伍员奔吴；卫国动乱；宋国华、向之乱；齐景公患疾，晏子劝齐侯修养德行，于是，齐侯放宽政令，减轻赋税；郑子产病死，子太叔执政，等等。卫国动乱的一大段纪事，传虽书在宋国华、向之乱，“冬，十月，公杀华、向之质而攻之。戊辰，华、向奔陈，华登奔吴”之前。但有可能为避免头绪过多、文字凌乱，《左传》将卫国动乱前后有关的史实集中写到了一起。如此，闰月戊辰杀宣姜等事，就可在年终，而并非必定在闰八月了。襄十九年传追述郑公孙虿死事类此。

昭二十年闰月是不是年终闰，以上仅属分析和猜测。但，《左

传》所记文公元年的闰三月，却可认定确系作者杜撰。理由是：

①文元年（前626）按鲁国历日，是年岁首建子，并不失闰，无须三月置闰。

②公元前7世纪不具备历术规范设置任意年中闰月的方法和依据（包括日影或昏旦星象观测）。文元年“闰三月”绝非《左传》收集的史料中原有的。

③僖公后期鲁历基本建子。文元年经书二月癸亥日食。食时太阳在危宿，黄经307°.8，已入寅月。还要再加个闰三月，就是说历法有意要将岁首调整为寅月。这样做，既与其前后诸年岁首抵牾，又与《春秋》僖、文历日不接。

实际上，闰三月之说完全是《左传》作者自己搞错了。据学者研究，《左传》作者并非春秋鲁君子左丘明，而是战国时人。成书约在公元前4世纪初年，上距鲁哀公末年约七八十年。他解说《春秋》，如今人手持长历阅读历史一样，我认为他很可能是手执周历来为《春秋》作传的。当然，作者并未实历春秋史实。《左传》可能收集有文元年“五月辛酉朔晋师围戚”，“六月戊戌取之”的史料。《左传》“皆不虚载经文”。而在《春秋》中有文元年二月癸亥日有食之的记载。由于时代限制，是时还没有推步日食的方法。作者根本不知道文公元年癸亥日食已入寅月。而根据周历，文元年癸亥是正月朔日，《春秋》记为二月显然鲁历失闰了。另一方面，日食在朔。二月癸亥日食，不论是二月朔还是二月晦，怎么样也得不到五月辛酉朔。只有加一“闰三月”，既调正了失闰，又正好合周历五月辛酉朔。作者对周历深信不疑，于是就擅加了这个“闰三月”。岂知，这样一来，把岁首和历日完全搞乱了。因为实际上这次日食应为鲁历三月。经文误三为二。而五月辛酉朔先天一日，所记为晋事，并非鲁国历日。这些都是《左传》作者始料不及的。也可能《左传》作者并非一人，成书也不是一时。这些天

文、历法内容是别的作者加进去的。当然也不能排除，在《左传》刻写、承授过程中，其他熟悉天文历数的学者依据周历或自己的认识、理解，增益或擅改有关天象和历法方面内容的可能性。

五、《左传》有用周历解说《春秋》的痕迹

《左传》18 万字。除前述 386 历日干支、8 闰月、19 朔晦日期外，还记载了许多日月岁星的位置和昏旦星象等天文历数内容。它们对于了解春秋战国天文历法的发展极为有用。古今两千年来，不少人对它们做过考查，但总的说来，还是有很多问题值得深究。

《左传》有关历数的记述似都为用周历解经而作。

①僖公五年春王正月辛亥朔日南至。公既视朔，遂登观台以望，而书，礼也。凡分至启闭，必书云物，为备故也。

这可能是分至启闭八节最早的记载。

僖公五年（前 655）入周历壬子蔀 58 年，为第 4 章章首。斯年天正冬至月辛亥朔，小余 235；辛亥冬至，小余 8，朔旦冬至相齐，起于卯时。《左传》这条至朔是根据周历注记的，并不合天象。笔者用比较严格的现代天文方法计算，得出实朔为壬子日戌时，儒略历为公元前 656 年 12 月 26 日。冬至为公元前 656 年 12 月 27 日癸丑，亥时。至朔相差 1 日，均不为辛亥。《左传》所书冬至差 2 日，合朔失 1 日，皆为先天。

②僖公五年八月甲午，晋侯围上阳。问于卜偃曰，吾其济乎？对曰，克之。公曰，何时？对曰，童谣云丙子晨龙尾伏辰；均服振振，取虢之旂。鹑之贲贲，天策焞焞，火中成军，虢公其奔。其九月十月之交乎！丙子旦，日在尾，月在策，鹑火中，必是时也。

冬十二月丙子朔，晋灭虢。

传文中，龙尾、尾、天策、鹑火等为星名，辰、中、伏等是天文现

象。鹑火为十二星次之一,含柳星张三宿,为南宫朱鸟七宿之中。龙指东宫苍龙,龙尾为尾箕宿。天策即傅说星,今天蝎座G星。辰,日月相会、合朔;伏,星距日很近,光为日所淹;中,南中,过子午线。

僖五年入周历壬子蔀58年,十二月丙子朔,小余84。《左传》所记合周历,但不与天象合。实朔为丁丑日丑时,公元前655年11月16日。合朔时日月在尾7°.7,巳时月在策。但朔月是看不到的。旦时(日出前二刻半)鹑火基本已过南天子午线。鹑尾次开始中天。传书丙子朔先天1日。丙子旦实际天象:日在尾7°,月在心。整个丙子日月在心尾,而不在策。旦中星象则与丁丑相仿。

③文公元年闰三月。这是最早的年中闰月记载。前面已说,此为《左传》作者据周历杜撰。文元年(前626)入周历辛卯蔀11年,天正癸亥朔,小余277;冬至癸未日,小余16,闰余13,当年终置闰,如按无中气之月为闰月,应闰十一月。

④襄二十七年十一月乙亥朔日食,辰在申,再失闰。昭十七年夏六月甲戌朔日有食之。

这两次日食《左传》的说法都不正确,前面已经讨论过。这里想着重指出,《左传》之所以选中这两次日食,只是由于它们的历日合周历。襄二十七年(前546)入周历庚午蔀15年。这一年周正九月适值乙亥朔,小余79,为秋分前1月、斗柄建申。前已指出,此为前546年10月13日之日全食。食时太阳在氐宿,黄经193°.3,斗柄建戌,并非申月。申酉之月皆不入限,无食。《左传》作者深信周历不疑,故加上了辰在申,再失闰一段议论。昭十七年六月朔日食是否应该救日的记述,情况也是如此。《春秋》的这次日食记载的月日有误。正因如此,对于分析《左传》天文、历法材料的真伪、成书年代和作者才更加珍贵。《左传》作者当然不知

六月甲戌并无日食发生。在春秋37日食中，只有两次符合周历。一为宣十七年六月癸卯，一为昭十七年六月甲戌朔日食。《春秋》日食仅有几次日期失误，偏偏这两次都在其中。《左传》没有选取宣十七年日食，可能因为它失书朔日。昭十七年(前525)周历入庚午蔀36年。周正六月甲戌朔，小余923。是年闰余17，年终当闰。按无中置闰，应闰三月。

这两次日食都是很典型的例子，可充分证明《左传》作者持周历解经。季平子与太史的对话以及辰在申等都是据周历而主观加进去的。

⑤襄三十年二月癸未，晋悼夫人食舆人之城杞者。绛县人或年长矣，无子而往，与于食。有与疑年，使之年。曰，臣小人也，不知纪年。臣生之岁正月甲子朔，四百有四十五甲子矣，其季于今三之一也。吏走问诸朝。师旷曰，鲁叔仲惠伯会郤成子于承匡之岁也。

由经传纪事考知，绛县老人生当文十一年(前616)。是岁入周历辛卯蔀21年，天正朔乙丑，小余113；地正甲午朔，小余612；人正(寅正)甲子朔，小余171。《左传》作者以周历得出周正三月、寅正正月甲子朔，与绛县老人说合。并认为晋用夏正。

⑥昭公二十年春二月己丑日南至。梓慎(鲁之日官)望氛……

此为《左传》记述的第二个日南至日期，也是据周历得出的。昭二十年(前522)入周历庚午蔀39年，为第3章章首。天正正月己丑朔，小余470；冬至己丑，小余16，己丑冬至合朔午时齐同，加时正南。按周历章蔀首之年闰余为0，不闰。其前一年当闰。或置年终，或依无中置闰，则当闰十一月。据经传历日，昭十九年无闰。传昭二十年有闰，十九年无闰。故据周历，章首失闰一月，记作二十年二月(朔)己丑日南至。

六、《左传》所书岁星位置均非其时实记

有关岁星运动的记载为《春秋》所无，完全是《左传》新增的。所述史实也多为无经之传，其中，直书岁星位置者 6 次，间接记述的 5 条。下面是关于岁星位置的简要记述：

①襄二十八年传言，据梓慎推算，是年(前 545)岁星应舍星纪，而观测所见，实在玄枵。

②襄三十年传追述十九年(前 554)子蟜死后将葬之时，岁在降娄次。裨灶预言伯有活不到岁星再到这个位次的日子了。襄三十年(前 543)秋七月，伯有被杀。木星位在娵訾之口，明年才到降娄，证实了裨灶的预言。

③昭公八年(前 534)传说，九月楚围陈，十一月壬午，灭陈。史赵答复晋侯所问谓，陈国是颛顼的后代。颛顼崩于岁在鹑火之年，故当卒亡于斯年。而今岁星在箕斗之间的汉津星次中，陈还会复兴。

④昭九年(前 533)传记载，夏四月陈地火灾。郑裨灶说，五年陈将复封，封五十二年后被灭亡。即封后岁五及鹑火之年终于灭亡，此乃天道。据《左传》记载，陈复封于鲁昭公十三年(前 529)。昭八年冬十一月楚灭陈至复封历 5 年。陈最终灭亡于哀公十七年(前 478)秋七月己卯，距复封 52 年。岁五及鹑火为 49 年，故复封在大梁岁。则昭九年为岁在星纪之年。

⑤昭十年(前 532)传载，春王正月有星出于婺女。郑裨灶与子产讲，七月戊子，晋君将死。现在岁星在颛顼之虚(玄枵次)。姜氏、任氏保有这里的土地。女宿正当玄枵首位，而有妖星，预告灾祸将归邑姜。邑姜是晋侯的先妣。

⑥昭十一年(前 531)传书，周景王问苌弘，今岁诸侯中谁吉谁凶。苌弘答，蔡国不吉利，襄三十年(前 543)蔡世子般杀其君岁在

娵訾，至今十三载，岁复在豕韦。不会过去此年了，楚将据有蔡国，然而这是积累邪恶。等岁星到达大梁，蔡将复国；楚又招凶，此乃天之常道。

⑦昭三十二年传言，夏，吴伐越。史墨说，不用四十年，越将占有吴国，越得岁而吴伐之，必受其凶。

史墨但云"越得岁"，未言岁在何次。按《周礼·春官·保章氏》郑注，星纪，吴越也。吴越既同属一次，何以此云"越得岁"而吴"必受其凶"？有的学者认为，是岁（前510）果在星纪，则哀公十七年（前478）陈卒亡当在鹑尾，而不在鹑火。是知越得岁乃指岁在析木。盖析木本越分，分野称"析木，燕也"，为后人所易。

经笔者计算考验，《左传》所书岁星位置与天象全不相符，皆非其时观测实录。《汉书·律历志·世经》中，刘歆4次引用《左传》的岁星记载论证三统历的合天。笔者以岁术、纪术推步，岁次虽多与三统历相合，但仍有参差。如哀十七年传作鹑火次，而三统历得鹑尾；襄二十八年，岁在星纪而淫于玄枵，当作失次已进入玄枵，而三统仍作星纪（计算证明玄枵失天更远）。考查结果列于表3—4。

刘歆认为昭三十二年（前510）"越得岁"为星纪之年。上距僖公五年（前655）145年。僖五年春，骊姬诬陷两位公子都参预了太子的阴谋，于是重耳逃亡到蒲城，夷吾奔屈。晋侯杀其世子申生后，派遣寺人披攻打蒲城。于是重耳逃亡到了翟国。《国语》记载，是年岁在大火。145年后，昭公三十二年（前510），按岁星12岁行天1周计，当岁在析木。传书"越得岁"，刘歆视作岁在星纪，其前一年为析木，这可能就是刘歆据《春秋》内外传得出每144年岁星超辰一次的依据。昭三十二年岁在星纪，则其前35年的襄二十八年（前545）应在玄枵，这与《左传》相符。但如此，其后32

表 3—4 《左传》岁星纪事失天情况

左传	纪事	三统	失天	西汉	失天	先秦	失天	木星真实位置(°)		三统历	岁术推步
年代 (公元前)	岁在	十二次 (°)	度(°)次	十二次 (°)	度(°)次	十二次 (°)	度(°)次				世经
襄 十九 (554)	降娄	0	74 2.47	奎娄 359.5	73.5 2.45	壁奎 345.5	59.5 1.98	273～ 299	286 女虚	降娄 24	胃初
廿八 (545)	星纪 〔玄枵〕	270	62 2.07	斗牛 260.5	52.5 1.75	箕斗 252.5	44.5 1.48	192～ 225	208 氐房心	星纪 26	女 4
卅 (543)	娵訾	330	66.5 2.22	室壁 332.5	69 2.3	危室 316	52.5 1.75	250～ 277	263.5 斗	娵訾 27	壁 9
卅一 (542)	(降娄)	0	68 2.27	奎娄 359.5	67.5 2.25	壁奎 346	54 1.80	279～ 305	292 牛女虚危	降娄 27	胃 3
昭 八 (534)	析木	240	56 1.87	尾箕 233	49 1.63	房心尾 222	38 1.27	166～ 202	184 轸角亢氐	析木 28.5	斗 9
九 (533)	(星纪)	270	57 1.90	斗牛 261	48 1.60	箕斗 252.5	39.5 1.32	197～ 229	213 氐房心尾	星纪 29	女 6

续表

左传	纪事	三统	失天	西汉	失天	先秦	失天	木星真实位置(°)		三统历	岁术推步
年代 (公元前)	岁在	十二次 (°)	度(°)次	十二次 (°)	度(°)次	十二次 (°)	度(°)次				世经
昭　十 (532)	玄枵	300	58 1.93	女虚危 297	55 1.83	牛女虚 283.5	41.5 1.38	229～ 255	242 尾箕	玄枵 29	危 14
十一 (531)	豕韦	330	62 2.07	室壁 332.5	64.5 2.15	危室 316	48 1.60	255～ 281	268 斗牛	娵訾 29	奎 2
十三 (529)	(大梁)	30	63.5 2.12	胃昴毕 29.5	63 2.10	娄胃昴 16	49.5 1.65	309～ 344	326.5 危室壁	大梁 29.5	毕 11
卅二 (510)	析木	240	47.5 1.58	尾箕 233	40.5 1.35	房心尾 222	29.5 0.98	175～ 210	192.5 角亢氐	星纪 3.5	斗 15
	星纪	270	77.5 2.58	斗牛 261	68.5 2.28	箕斗 252.5	60 2.00				
哀　十七 (478)	(鹑火)	120	35 1.17	柳星张 117.5	32.5 1.08	鬼柳里 106	21 0.70	64～ 106	85 井鬼柳	鹑尾 10	翼 9

年的哀十七年当为鹑尾,而传书鹑火。另一方面襄二十八年岁在玄枵又与传言襄三十年岁在娵訾之口,昭八年析木之津、十年玄枵抵牾。

将襄二十八年"岁在星纪而淫于玄枵"和昭三十二年"越得岁"暂时搁置,那么国语所书僖公时代的6条岁星位置和《左传》记载9条岁星所在皆合12岁行天1周的规律。"越得岁"如指析木,则也与此相合。可以这样说,《左传》、《国语》关于岁星位置的记述,全与天不合,并非实录,而是作者依据12岁行天1周推算得出的。因而与三统历岁术推步也并不完全一致。木星的真实恒星周期为11.8622年或4332.59天,约86年就要超辰1次。由表3—4考查得出的《左传》岁星位置失天度数和失次情况可以看出,这些位置大概是作者按照公元前4世纪前期岁星实测位置逆推得到的。襄二十八年"岁在星纪而淫于玄枵",可能是作者根据对岁星运动有顺逆、疾徐、盈缩的认识加进去的。与岁星平均运动速度较12年周期为大,而有规律的超辰运动并无关系。

第五节 春秋鲁国历法

一、王韬的《春秋长历》

《左传》所书386历日干支,多为新增,有的与经同记一事而月日不同。如襄十九年《经》谓,"秋七月辛卯,齐侯环卒";《传》书,"夏,五月壬辰晦,齐灵公卒,庄公即位"。《左传》杂采各国史策,收集的史料来自各诸侯国。幽厉以后,列国自行颁历。经传月日参差,可能是各国历数、建正不一所致。有些历日已经作者追改,而有的仍行其旧。哪些经追正,何者未改易,传文未予说明,令人不易揣度。再者春秋数术散乱、绝灭,《左传》乃战国时成书,作者追改的方法和依据是否准确可靠也值得深究。另一方面,《左传》中有些鲁国

历日、历数，为作者擅增或妄改。上节已指出，《左传》新增的朔晦多先天，并有执周历解说《春秋》的迹象。《左传》历日与春秋鲁历有异，不能视作收集增补的鲁历原始资料。因此，这一节讨论春秋鲁国的历日制度就撇开《左传》，主要根据《春秋》的记载。

说到春秋历法，就必须谈谈清末学者王韬的工作。学者们对他的评价极为精当。古今数十位研究春秋历法的学人中，唯有他的《春秋长历》最为近真。在春秋历法研究上有更大发现或排出与王韬有较多差异且尤为真实的长历者，至今未见，估计今后也很难会有。当然，这并不是说，王韬的春秋历学研究没有瑕疵，或者长历毫无疏失的地方了。不足之处主要有以下几点：

(一)《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》存在不一致的地方

《考》、《表》之间，一些朔日干支、闰年、闰月位置有参差。如，隐公八年，《表》列岁首建丑，正月庚午朔；而《考》作建寅，正月庚子朔。冬至在七年十二月庚子，有岁终闰月。《考》作建寅是对的。《表》书“上年闰十二月三十日庚子冬至”误。初步统计，《考》、《表》不一之处有：岁首建正2，闰年1，闰月7，正朔干支4，其他各月朔日不同者未计。《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》是王韬春秋历学研究、春秋长历的主体部分，某些历日有异，读者使用起来就会产生困惑。

(二)日至推算和岁首建正稍有疏失

王韬认为，僖公五年、昭公二十年的正朔日南至，当以实法考求，决定步算之误。不可先执成见，舍法以从传也。然韬之实法考求，于天仍有违失。王韬及所引江永、梅文鼎采用历象考成、授时历计算日躔和定朔的具体推步方法，本书在后面有关章节中将详细介绍。授时历推僖公五年正月辛亥朔14刻冬至，合传；而昭

公二十年冬至不为己丑，却是戊子日 83 刻。较《左传》更先天 1 日。王韬据江永依历象考成推求，得僖五年平冬至乙卯巳正初刻 8 分；加均 1°8′①，化时减平冬至，则定气在甲寅日卯时。若是时小轮并径加大，其加均或能至 1°20′～30′，变时得定冬至亦止癸丑日亥子之间。皆距辛亥二三日。又算此月平朔、定朔皆在壬子，知传亦失天 1 日。昭二十年平冬至壬辰日申初初刻 11 分；约计加均及小轮均差的减时，定冬至当辛卯日卯辰之间，传书己丑，实失天 2～3 日。笔者用现代天文根数推得僖公五年冬至在癸亥日亥时(前 656 年 12 月 27 日癸丑 22 时 12 分，儒略日 1482180)。合朔为壬子日戌时(前 656 年 12 月 26 日壬子 19 时 26 分，儒略日 1482179)；昭二十年冬至为辛卯日卯时(前 523 年 12 月 27 日辛卯 5 时 51 分，1530758)，合朔庚寅日未初(前 523 年 12 月 26 日庚寅 13 时 16 分，1530757)。可见江永按历象考成加均及小轮均差的改正，推得结果与天十分密近。王韬按历象考成加均，而未计小轮并径加大的修正。《朔闰日至考》推出的日至常有出入。经笔者计算考校，王韬列出的 245 年冬至日期中有 163 年后天 1 日。由此，他得到的春秋长历岁首建正中。下列 8 年差失 1 月：

庄九年岁首应建丑，而《表》、《考》作建子；

庄二十八年应建丑，《表》、《考》建子；

僖十三年当建丑，《表》、《考》建子；

成元年当建子，《表》、《考》作建亥；

襄公二年《表》、《考》建子，实当建丑；

襄二十一年《表》、《考》建亥，实应建子；

昭九年《表》、《考》建子，实当建丑；

定十五年《表》、《考》作建子，实当建丑。

---

① 本书 360 度制的度分秒一律以“°”“′”“″”标注。凡记作“度”、“分”、“秒”者，皆为中国历度。特殊情况会另加注明。

(三)王韬春秋长历有些朔日干支曾作人为调整

先秦汉魏推步历法采用平朔，月有大小，小月 29 日，大月 30 日，大小月相间。每隔 13 或 15 月，偶尔 17 个月有 1 次连大月，因所取朔策长度而异。这种两个大月相连的情况，通常在 100 个月中出现 6 次、间或为 7 次。但不会两月连小，也不能出现 3 或 4 个月连续大月。这是平朔推步的内在规律。

在《春秋朔闰日至考》中，文公元年的历朔是这样的：

正月小甲子朔，二月大癸已朔，三月小癸亥朔，四月小壬辰朔，五月大辛酉朔，六月大壬辰朔，七月小壬戌朔，八月大辛卯朔，九月小辛酉朔，十月大庚寅朔，十一月小庚申朔，十二月大己丑朔，闰十二月小己未朔。

这里三、四两月连小，已不符平朔推步规范。五月辛酉朔、六月壬辰朔，势必五月长 31 天，更为阴阳历法所未见。曾次亮先生认为这可能是作者的疏忽，而将六、七月朔日改为其前 1 日，即六月大辛卯朔，七月大辛酉朔，如此，则五、六、七、八 4 月连大。前已说过，在未行定朔的先秦汉魏时期，这种情况断无可能。

成十七年，《朔闰日至考》是这样安排的：

正月小癸已朔，二月大壬戌朔，三月小壬辰朔，四月大辛酉朔，五月小辛卯朔，六月大庚申朔，七月大庚寅朔，八月小庚申朔，九月大己丑朔，十月小己未朔，十一月小戊子朔，十二月大丁已朔，闰十二月小丁亥朔。

此年十、十一两月连小，与文公元年类似，平朔步历是不会发生的。这两个例子说明，王韬长历有些地方并非推步得出而是人为安排的。

在《春秋朔闰表》中，王韬对这两种历日做了如表 3—5 所示的平滑处理。

表 3—5 《朔闰表》文公初年、成公末年历朔安排

公	年	正月朔	二月朔	三月朔	四月朔	五月朔	六月朔	七月朔	八月朔	九月朔	十月朔	十一月朔	十二月朔	闰月朔
文	元年	甲子	甲午	癸亥	癸巳	癸亥	壬辰	壬戌	辛卯	辛酉	庚寅	庚申	己丑	己未
	二年	戊子	戊午	丁亥	丁巳	丙戌	丙辰	丙戌	乙卯	乙酉	甲寅	甲申	癸丑	
	三年	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑
成	十七年	癸巳	壬戌	壬辰	辛酉	辛卯	庚申	庚寅	庚申	己丑	己未	戊子	戊午	丁亥
	十八年	丁巳	丙戌	丙辰	乙酉	乙卯	甲申	甲寅	癸未	癸丑	壬午	壬子	壬午	

如此处理，虽然避免了平朔推步可能出现的两小月相连及数月连大；但却使僖三十、三十一两年 23 月皆小大月相间，在僖三十二、三十三至文公元年间连续 25 月不得两大月相连，而文公二、三年两次连大却仅相距5个月。对于推步判定、比较合天的春秋历法，这种情况，同样也是断无可能的。连续 23、25 个月大小月相间，说明其时历法朔策小于 29.52 日；两次大月相连其间仅距 5 月，只有在朔望月长度大于 29.55555 日的历法中才会出现。合天的朔望月平均长为 29.53059 日。29.5200 或 29.5556 日皆失天较多，采用这样朔策的历法行用十余年，甚至几年，历日与月相就有差失。前面说过，春秋鲁历比较合天，步朔相当准确，绝不会采用如此粗疏的朔策。推步历法也不会如此频繁改历。再如，为安排宣公七年六月朔日合经癸卯，有意将宣五、宣六的两次连大缩短，使其间仅距 11 月；而又加长宣七、宣八前后连大月间隔为 19 个月。王韬批评杜预、顾震沧未明历算，只就经传上下月日推排干支，遇有窒碍，则置闰以通之，委曲迁就。诸历家因先入《传》说，也常常错误地违法以迁就，曲

法以求合。由上举数例看出,王韬自己在遇到个别历日窒碍之处,似也有偏离步法、人为委曲迁就的情况。

王韬强调,“须知不由推步则无从知其失闰,必先以今准古,而后古术之疏乃见,失闰之故可明”。以今准古方法无疑是正确的。他生当19世纪中叶,推步日躔采用《历象考成》的方法,得出的春秋日至多后天1日。因而长历中岁首建正略有出入。这是时代的限制。《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》有些闰年、闰月、朔日干支不尽一致,个别地方也稍有“违法迁就、曲法求合”的情况。说明有些历日安排,王韬还在推敲,尚未最后认定,长历以及春秋历法研究不是最终结果,属未定稿。因此,本节对春秋历法的讨论,只可以说是在学习王韬长历基础上的一点心得和对未定稿的稍许补充。除闰月的处理上稍有差异外,推步得出的历谱与王韬更是大同小异。

二、春秋鲁国的历朔推步

春秋时期,由观象授时发展到先期推步制定历法的阶段还为时不久,尚未形成如古六历、三统、四分等完整统一的年月日朔闰气的严格推步体系。是时日至测量不够准确、闰月设置尚欠规整,因此相应的岁首建正并非十分固定。历法推步的主要功能是预告朔日,根据测景、观星或历日安排需要随时在年终加一闰月以调正四时。只要所采用的朔策与平均朔望月长度相近,这种历法就可以适用一个相当长的时期。

现在讨论,是否能找到一种历法,它比较合天,而可全部符合《春秋》的朔闰,又与它所记载的393历日干支基本相容。也就是说,我们拟依据《春秋》的历日朔闰,对春秋鲁国实际行用的历法试做复原研究。

《春秋》是2500年前鲁国的历史。经过多年的传抄、变乱,散

简、脱漏、错讹是难免的。《春秋》历日中肯定有些是不对的。如在《春秋》日食考中提到的宣公八年七月甲子日食，七为十之误；宣十七年六月癸卯日食，当作宣公七年六月癸卯，“十”字衍；襄公十五年八月丁巳日食，“七”误作“八”；等等。在《春秋》历日中，有时在一个月名下，书写的两个史日，其间相距大于30日，显然此中必有一误或后者失记月份；有的相距虽不足30日，但与朔日安排有矛盾，或分居其前后，情况也是如此。如，桓五年“正月己丑……甲戌”，僖二十七年“秋八月乙未……乙巳”，等等。有的历日即便用年中闰也无法解释或其年根本无法安排年中闰月。如，桓十七年正月有丙辰，二月丙午，五月丙午，六月丁丑，八月癸巳，十月朔（庚午）日食经考查系观测实录，则正月、二月历日中必有误记。

以上几例错误比较明显，类似情况，不会影响对春秋历法的复原。但另有一些历日，是否经载有误不易判定，它们共计约有十余条，占《春秋》历日记载不足5%。但它们的是与否，与鲁历的复原密切相关。例如下列历日是干支、月名错误还是年中有闰，很难判别：

僖元年七月戊辰，十月壬午，十二月丁巳；

僖三十三年四月辛巳，癸巳，十二月乙巳；

文十二年二月庚子，十二月戊午；

文十三年五月壬子，十二月己丑；

昭二十二年四月乙丑，十二月癸酉朔日食；等等。

再如，成九年七月丙午、哀三年四月甲午等约十条历日，近于晦朔，月名干支是否有误，也很难确认。

对于上述十余条无法判定是干支、月名错误还是年中有闰的历日，王韬长历中皆置年中闰月予以处理。由于考虑到春秋时期尚无闰余及二十四节气，缺乏年中设闰的天文依据，所以我们复原的春秋历法中，上述历日悉按月日有误对待。如果要寻找相异之处，这可能就是我们与王韬长历间的最大不同。

下面依据鲁国史官实记的27条朔日(表3—6)来复原春秋鲁国的历法。这里面包括经考查验证确系观测实记的32次日食中经书明发生于时历朔日者23个及经载僖成时期的4个晦朔。

表3—6　考查认定鲁国史官实记的27个朔日

鲁历朔日	儒历(前)	鲁历朔日	儒历(前)	鲁历朔日	儒历(前)
桓三年七月壬辰朔	709.7.17	成十六年六月丙寅朔	575.5.9	昭十五年六月丁巳朔	527.4.18
庄廿五年六月辛未朔	669.5.27	成十六年七月乙未朔	575.6.7	昭廿一年七月壬午朔	521.6.10
庄廿六年十二月癸亥朔	668.11.10	成十七年十二月丁巳朔	574.10.22	昭廿二年十二月癸酉朔	520.11.23
庄三十年九月庚午朔	664.8.28	襄十四年二月乙未朔	559.1.14	昭廿四年五月乙未朔	518.4.9
僖五年九月戊申朔	655.8.19	襄廿一年九月庚戌朔	552.8.20	昭卅一年十二月辛亥朔	511.11.14
僖十五年十月庚辰朔	645.9.27	襄廿三年二月癸酉朔	550.1.5	定五年三月辛亥朔	505.2.16
僖十六年正月戊申朔	645.12.24	襄廿四年七月甲子朔	549.6.19	定十二年十一月丙寅朔	498.9.22
僖廿二年十一月己巳朔	638.10.10	襄廿七年十二月乙亥朔	546.10.13	定十五年八月庚辰朔	495.7.22
文十五年六月辛丑朔	612.4.28	昭七年四月甲辰朔	535.3.18	哀十四年五月庚申朔	481.4.19

(一)鲁国历法不是四分术

四分法朔策为29.530851日。襄二十三年二月朔癸酉日食,为鲁国史官观测实录。如果其时历术是四分法,那么定十二年十一月朔日(相距652月)应为丁卯。只有其时历法的朔策小于29.530675日,才能得到十一月丙寅朔。而定公十二年日食确是

发生于十一月丙寅朔并为《春秋》记载下来。说明春秋鲁历朔策比三统、四分为小。

春秋前半期的情况也是如此。庄二十六年十二月癸亥朔、文十五年六月辛丑朔、襄二十一年九月庚戌朔三次日食。皆为鲁史观测记录。如果斯时鲁用四分术，那么庄二十六年十二月癸亥朔后116年(1432月)的襄公二十一年九月，文十五年六月辛丑朔后的60年(746月)的襄二十一年九月都一定会是辛亥朔。而庚戌朔为史官实记，并为前节《日食考》所证实。以上三例均说明春秋鲁历不是四分术，它的朔策较四分为小。这方面的例证还很多，就不一一例举了。

(二)春秋鲁历朔策在29.5306703至29.5306755日之间

不难推出，当朔策在29.5306703与29.5306755日之间时，表3—6中所列《春秋》文实录的这27个朔日干支可同时得到满足。这就是说，可以找到这样一种历法，它完全符合《春秋》实记的朔日，又与绝大多数历日干支相容。这就是我们复原得到的春秋鲁国历法。这种历术的朔策比四分法精确。由殷墟卜辞、周原甲骨知，殷商时期我国就注重月相观测。西周，月相更是历法的重要成分，并为纪月中日序的主要形式。经过数百年的观测实践，到了春秋对月相的盈亏圆缺的会合周期有了更深刻的认识，得出较精确的平均朔望长度，是完全可以理解的。

(三)春秋鲁历步朔

用复原的春秋鲁历计算平朔，可行的方法很多，结果相差无几。这里介绍一种近于六历的推步术。其术法数如下：

蔀年　83　蔀月　1027　蔀日　30328

元＝15蔀＝1245年＝15405月＝454920日

$$朔策=蔀日/蔀月=30328/1027$$
$$=29+545/1027=29.53067186日$$

蔀名：

1 癸酉　2 辛丑　3 己巳　4 丁酉　5 乙丑

6 癸巳　7 辛酉　8 己丑　9 丁巳　10 乙酉

11 癸丑　12 辛巳　13 己酉　14 丁丑　15 乙巳

隐公元年入己酉蔀 78 年，隐七年为丁酉蔀首，僖二十七年是乙巳蔀首。襄公二十三年为元首入癸酉蔀第 1 年。蔀名为该蔀首日的日名干支，即入蔀第 1 年第 1 月合朔之日，小余为 0。加大余 29，小余 545，即加 $29\frac{545}{1027}$日，得次月朔日大小余。递加朔策，小余满蔀月 1027，进位成大余。这样可得一蔀内各月朔积日（大余）和小余。古历计算不用十进制小数，日的奇零用分数来表示。日的整数部分称作大余，小余是日的分数部分分子的数值。因为春秋鲁历置闰尚不规范，蔀内每年岁首位置并非固定。推步各年正月朔日需自蔀首之月计数相距月数（积月），以朔策 $29\frac{545}{1027}$乘之。小余满 1027 进为大余。大余以干支周期 60 去之，不尽，余数以蔀名命之，算外，即自蔀名干支计数，蔀名不计入，得所求年正月朔日干支和小余。可以下式表示：

$$所求年正月朔日大、小余=[积月\times 朔策/60]_R$$

$$次月朔大小余=正朔大小余+29\frac{545}{1027}$$

累加朔策（29+545/1027）得各月朔。R 为求余计算，即求方括号内算式的余数。本书以后经常使用此符号。

用复原的春秋鲁历推得的各年正朔干支、小余、对应的儒略历日期和建正、冬至，刊于表 3－7，同时列出王韬长历《朔闰日至考》各年正朔、冬至、建正和闰月，以资比较。

表 3—7 春秋鲁历冬至、正朔大小余、岁首建正表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
隐 元	丑辛巳	722.1.16	十二、十二 癸亥	丑辛巳 268	723.12.28 壬戌
二	丑丙子闰	721.1.6	十二、廿三 戊辰	丑己亥 646	722.12.28 丁卯
三	丑庚子	720.1.24	闰十二、四 癸酉	丑己亥 542	721.12.28 癸酉
四	丑甲午	719.1.13	十二、十六 己卯	丑癸巳 920	720.12.28 戊寅
五	丑戊子闰	718.1.2	十二、廿六 甲申	丑戊子 271	718.12.28 癸未
六	丑壬子	717.1.21	闰十二、七 己丑	丑壬子 167	718.12.28 戊子
七	丑丁未闰	716.1.10	十二、十八 甲午	丑丙午 545	717.12.28 甲午
八	寅庚午	715.1.28	十二、三十 庚子	寅庚午 441	716.12.28 己亥
九	丑乙丑	714.1.18	十二、十一 乙巳	丑甲子 819	715.12.28 甲辰
十	丑己未闰四	713.1.7	十二、廿一 庚戌	寅戊子 715	714.12.28 己酉
十一	丑癸未	712.1.25	十二、二 乙卯	丑癸未 66	713.12.28 乙卯
桓 元	丑丁丑	711.1.14	十二、十四 辛酉	丑丁丑 444	712.12.28 庚申
二	丑壬申闰	710.1.4	十二、廿五 丙寅	寅辛丑 340	711.12.28 乙丑

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
桓 三	丑丙申	709.1.23	闰十二、六 辛未	丑乙未 718	710.12.28 庚午
四	丑庚寅	708.1.11	十二、十七 丙子	丑庚寅 69	709.12.28 丙子
五	丑甲申闰	708.12.31	十二、廿八 壬午	寅癸丑 992	708.12.28 辛巳
六	丑戊申	706.1.19	闰十二、九 丁亥	丑戊申 343	707.12.28 丙戌
七	丑癸卯闰	705.1.9	十二、二十 壬辰	丑壬寅 721	706.12.28 辛卯
八	丑丙寅	704.1.26	闰十二、一 丁酉	丑丙寅 617	705.12.28 丁酉
九	丑辛酉	703.1.16	十二、十二 壬寅	丑庚申 995	704.12.28 壬寅
十	丑乙卯闰	702.1.5	十二、廿三 戊申	丑乙卯 346	703.12.28 丁未
十一	丑己卯	701.1.24	闰十二、四 癸丑	丑己卯 242	702.12.28 壬子
十二	丑癸酉闰	700.1.12	十二、十五 戊午	丑癸酉 620	701.12.27 丁巳
十三	寅丁酉	699.1.2	十二、廿六 癸亥	寅丁酉 516	700.12.28 癸亥
十四	丑壬辰	698.1.21	十 二、八 己巳	丑辛卯 894	699.12.28 戊辰
十五	丑丙戌	697.1.10	十二、十九 甲戌	丑丙戌 245	698.12.28 癸酉

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
桓十六	丑庚辰闰	697.12.29	十二、廿九己卯	丑庚辰 623	697.12.28 戊寅
十七	丑甲辰	695.1.17	闰十二、十甲申	丑甲辰 519	696.12.28 甲申
十八	丑己亥	694.1.7	十二、廿二庚寅	丑戊戌 897	695.12.28 己丑
庄 元	子癸巳闰	694.12.27	正、三乙未	子癸巳 248	694.12.28 甲午
二	丑丁巳	692.1.14	闰十二、十四庚子	丑丁巳 144	693.12.27 己亥
三	丑辛亥闰	691.1.3	十二、廿四乙巳	丑辛亥 522	692.12.28 乙巳
四	丑乙亥	690.1.22	闰十二、六辛亥	丑乙亥 418	691.12.28 庚戌
五	丑己巳	689.1.11	十二、十七丙辰	丑己巳 796	690.12.28 乙卯
六	丑甲子	689.12.31	十二、廿八辛酉	丑甲子 147	689.12.27 庚申
七	子戊午闰	688.12.20	正、九丙寅	子戊午 525	688.12.28 丙寅
八	丑壬午	686.1.8	闰十二、二十壬申	丑壬午 421	687.12.28 辛未
九	子丁丑闰	686.12.29	正、一丁丑	子丙子 799	686.12.28 丙子

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
庄 十	丑庚子	684.1.15	闰十二、十二壬午	子辛未150	685.12.27 辛巳
十一	丑乙未闰四	683.1.5	十二、廿三丁亥	子乙丑528	684.12.28 丁亥
十二	丑己未	682.1.24	十二、五癸巳	丑己未906	683.12.28 壬辰
十三	丑癸丑	681.1.13	十二、十六戊戌	寅癸未802	682.12.28 丁酉
十四	丑丁未闰五	680.1.1	十二、廿六癸卯	丑丁未698	681.12.27 壬寅
十五	丑辛未	679.1.20	十二、七戊申	子壬寅49	680.12.28 戊申
十六	丑丙寅	678.1.10	十二、十九甲寅	丑乙丑972	679.12.28 癸丑
十七	丑庚申闰	678.12.30	十二、廿九己未	寅己丑868	678.12.28 戊午
十八	丑甲申	676.1.17	闰十二、十一甲子	丑甲申219	677.12.27 癸亥
十九	丑戊寅	675.1.6	十二、廿一己巳	丑戊寅597	676.12.28 己巳
二十	子癸酉闰	675.12.27	正、三乙亥	丑壬寅493	675.12.28 甲戌
廿一	丑丁酉	673.1.15	闰十二、十四庚辰	丑丙申871	674.12.28 己卯
廿二	丑辛卯	672.1.3	十二、廿五乙酉	丑辛卯222	673.12.27 甲申

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
庄廿三	子乙酉闰	672.12.23	正、六庚寅	子乙酉 600	672.12.28 庚寅
廿四	丑己酉	670.1.11	闰十二、十六乙未	丑己酉 496	671.12.28 乙未
廿五	丑甲辰	669.1.1	十二、廿八辛丑	丑癸卯 874	670.12.28 庚子
廿六	子戊戌闰	669.12.20	正、九丙午	子戊戌 225	669.12.27 乙巳
廿七	丑壬戌	667.1.8	闰十二、二十辛亥	丑壬戌 121	668.12.28 辛亥
廿八	子丙辰闰	667.12.28	正、一丙辰	子丙辰 499	667.12.28 丙辰
廿九	丑庚辰	665.1.16	闰十二、十二壬戌	丑庚辰 395	666.12.28 辛酉
三十	丑甲戌	664.1.4	十二、廿三丁卯	丑甲戌 773	665.12.27 丙寅
卅一	子己巳闰	664.12.25	正、四壬申	子己巳 124	664.12.27 辛未
卅二	丑癸巳	662.1.13	闰十二、十五丁丑	丑癸巳 20	663.12.28 丁丑
闵 元	丑丁亥	661.1.2	十二、廿六癸未	丑丁亥 398	662.12.28 壬午
二	子壬午闰五	661.12.22	正、七戊子	子辛巳 776	661.12.27 丁亥
僖 元	丑乙巳闰十一	659.1.9	十二、十八癸巳	丑乙巳 672	660.12.27 壬辰
二	寅己巳	658.1.28	闰十一、廿九戊戌	寅己巳 568	659.12.28 戊戌

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
僖 三	丑甲子	657.1.18	十二、十一甲辰	丑癸亥 946	658.12.28 癸卯
四	丑戊午	656.1.6	十二、廿一己酉	丑戊午 297	657.12.27 戊申
五	子壬子	656.12.26	正、三甲寅	子壬子 675	656.12.27 癸丑
六	子丁未	655.12.16	正、十三己未	子丙午 26	655.12.28 己未
七	子辛丑闰	654.12.5	正、廿五乙丑	子辛丑 404	654.12.28 甲子
八	子乙丑	653.12.23	正、六庚午	子乙丑 300	653.12.27 己巳
九	子庚申闰	652.12.13	正、十六乙亥	子己未 678	652.12.27 甲戌
十	丑甲申	650.1.1	闰十二、廿七庚辰	丑癸未 574	651.12.28 庚辰
十一	子戊寅闰	650.12.21	正、九丙戌	子丁丑 952	650.12.28 乙酉
十二	丑壬寅	648.1.8	闰十二、二十辛卯	丑辛丑 848	649.12.27 庚寅
十三	子丙申闰	648.12.28	正、一丙申	丑丙申 199	648.12.27 乙未
十四	丑庚申	646.1.16	闰十二、十二辛丑	丑庚申 95	647.12.28 辛丑
十五	丑甲寅	645.1.5	十二、廿三丁未	丑甲寅 473	646.12.28 丙午

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
僖十六	子戊申	645.12.24	正、五壬子	子戊申 851	645.12.27 辛亥
十七	子癸卯闰	644.12.14	正、十五丁巳	子癸卯 202	644.12.27 丙辰
十八	丑丁卯	642.1.2	闰十二、廿六壬戌	丑丁卯 98	643.12.28 壬戌
十九	子辛酉闰	642.12.22	正、八戊辰	子辛酉 476	642.12.28 丁卯
二十	丑乙酉	640.1.9	闰十二、十九癸酉	丑乙酉 372	641.12.27 壬申
廿一	丑己卯	640.12.29	十二、廿九戊寅	丑己卯 750	640.12.27 丁丑
廿二	子甲戌	639.12.19	正、十癸未	子甲戌 101	639.12.28 癸未
廿三	子戊辰闰	638.12.8	正、廿一戊子	子戊辰 479	638.12.28 戊子
廿四	子壬辰	637.12.26	正、三甲午	子壬辰 375	637.12.27 癸巳
廿五	子丁亥闰	636.12.16	正、十三己亥	子丙戌 753	636.12.27 戊戌
廿六	丑辛亥	634.1.4	闰十二、廿四甲辰	丑庚戌 649	635.12.28 甲辰
廿七	子乙巳	634.12.24	正、五己酉	子乙巳 0	634.12.28 己酉

续表

	正朔	《朔闰日至考》		春秋鲁历	
		儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
僖廿八	子庚子	633.12.13	正、十六乙卯	子己亥378	633.12.27 甲寅
廿九	子甲午	632.12.2	正、廿七庚申	子癸巳756	632.12.27 己未
三十	亥戊子闰	631.11.21	二、八乙丑	亥戊子107	631.12.27 甲子
卅一	子壬子	630.12.10	正、十九庚午	子壬子3	630.12.28 庚午
卅二	亥丙午	629.11.28	二、一丙子	亥丙午381	629.12.27 乙亥
卅三	亥辛丑闰八	628.11.18	二、十二辛巳	亥庚子759	628.12.27 庚辰
文元	子甲子闰	627.12.6	正、廿三丙戌	子甲子655	627.12.27 乙酉
二	子戊子	626.12.25	正、四辛卯	子戊子551	626.12.28 辛卯
三	子癸未闰	625.12.14	正、十五丁酉	子壬午614	625.12.27 丙申
四	丑丁未	623.1.2	闰十二、廿六壬寅	丑丙午825	624.12.27 辛丑
五	子辛丑	623.12.22	正、七丁未	子辛丑176	623.12.27 丙午
六	子乙未闰	622.12.11	正、十八壬子	子乙未554	622.12.28 壬子

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
文 七	丑己未	621.12.29	闰十二、廿九戊午	丑己未 450	621.12.27 丁巳
八	子甲寅	620.12.19	正、十癸亥	子癸丑 828	620.12.27 壬戌
九	子戊申闰八	619.12.8	正、廿一戊辰	子戊申 179	619.12.27 丁卯
十	子壬申	618.12.27	正、二癸酉	子壬申 75	618.12.28 癸酉
十一	子丙寅	617.12.15	正、十四己卯	子丙寅 453	617.12.27 戊寅
十二	子辛酉闰四	616.12.5	正、廿四甲申	子庚申 831	616.12.27 癸未
十三	子乙酉	615.12.24	正、五己丑	子甲申 727	615.12.27 戊子
十四	子己卯	614.12.13	正、十六甲午	子己卯 78	614.12.28 甲午
十五	子癸酉闰	613.12.1	正、廿八庚子	子癸酉 456	613.12.27 己亥
十六	子丁酉	612.12.20	正、九乙巳	子丁酉 352	612.12.27 甲辰
十七	子壬辰	611.12.10	正、十九庚戌	子辛卯 730	611.12.27 己酉
十八	亥丙戌闰	610.11.29	二、一乙卯	亥丙戌 81	610.12.28 乙卯

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
宣 元	子庚戌	609.12.17	正、十二辛酉	子己酉 1004	609.12.27 庚申
二	子甲辰	608.12.6	正、廿三丙寅	子甲辰 355	608.12.27 乙丑
三	亥戊戌	607.11.25	二、四辛未	亥戊戌 733	607.12.27 庚午
四	亥壬辰闰	606.11.14	二、十五丙子	亥癸巳 84	606.12.28 丙子
五	子乙巳	605.12.3	正、廿五辛巳	子丙辰 1007	605.12.27 辛巳
六	亥辛亥闰	604.11.22	二、七丁亥	亥辛亥 358	604.12.27 丙戌
七	子乙亥	603.12.11	正、十八壬辰	子乙亥 254	603.12.27 辛卯
八	子己巳闰五	602.11.30	正、廿九丁酉	丑己亥 150	602.12.28 丁酉
九	子癸巳	601.12.18	正、十壬寅	子癸巳 528	601.12.27 壬寅
十	子戊子闰	600.12.8	正、廿一戊申	子丁亥 906	600.12.27 丁未
十一	子壬子	599.12.27	正、二癸丑	子辛亥 802	599.12.27 壬子
十二	子丙午	598.12.16	正、十三戊午	子丙午 153	598.12.28 戊午
十三	子庚子闰	597.12.4	正、廿四癸亥	子庚子 531	597.12.27 癸亥

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
宣十四	子甲子	596.12.23	正、六己巳	子甲子 427	596.12.27 戊辰
十五	子己未闰	595.12.23	正、十六甲戌	子戊午 805	596.12.27 癸酉
十六	丑癸未	593.1.1	闰十二、廿七己卯	丑壬午 701	594.12.27 戊寅
十七	子丁丑	593.12.20	正、八甲申	子丁丑 52	593.12.27 甲申
十八	子辛未	592.12.9	正、二十庚寅	子辛未 430	592.12.27 己丑
成 元	亥丙寅闰	591.11.29	二、一乙未	子乙丑 808	591.12.27 甲午
二	子己丑	590.12.17	正、十二庚子	子己丑 704	591.12.27 己亥
三	子甲申	589.12.6	正、廿二乙巳	子甲申 55	589.12.27 乙巳
四	亥戊寅闰	588.11.25	二、四辛亥	亥戊寅 433	588.12.27 庚戌
五	子壬寅	587.12.14	正、十五丙展	子壬寅 329	587.12.27 乙卯
六	子丁酉	586.12.24	正、廿五辛酉	子丙申 707	586.12.27 庚申
七	亥辛卯闰	585.11.22	二、七丙寅	亥辛卯 58	585.12.27 丙寅
八	子乙卯	584.12.11	正、十八壬申	子甲寅 981	584.12.27 辛未

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
成　九	子己酉	583.11.30	正、廿九丁丑	子己酉332	583.12.27丙子
十	亥癸卯闰	582.11.19	二、十壬午	亥癸卯710	582.12.27辛巳
十一	子丁卯	581.12.7	正、廿一丁亥	子丁卯606	581.12.27丁亥
十二	亥壬戌闰	580.11.27	二、三癸巳	亥辛酉984	580.12.27壬辰
十三	子丙戌	579.12.16	正、十三戊戌	子乙酉880	579.12.27丁酉
十四	子庚辰闰七	578.12.5	正、廿四癸卯	丑己酉776	578.12.27壬寅
十五	子甲辰	577.12.23	正、五戊申	子甲辰127	577.12.27戊申
十六	子戊戌	576.12.12	正、十七甲寅	子戊戌505	576.12.27癸丑
十七	子癸巳闰	575.12.2	正、廿七己未	子壬辰883	575.12.27戊午
十八	子丙辰	574.12.20	正、九甲子	子丙辰779	574.12.27癸亥
襄　元	子辛亥闰	573.12.9	正、十九己巳	子辛亥130	573.12.27己巳
二	子乙亥	572.12.28	正、一乙亥	丑乙亥26	572.12.27甲戌

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
襄　三	子己巳	571.12.17	正、十二庚辰	子己巳 404	571.12.27 己卯
四	子甲子闰	570.12.7	正、廿二乙酉	子癸亥 782	570.12.27 甲申
五	子丁亥	569.12.24	正、四庚寅	子丁亥 678	569.12.27 庚寅
六	子壬午	568.12.14	正、十四乙未	子壬午 29	568.12.27 乙未
七	子丙子闰十	567.12.3	正、廿六辛丑	子丙子 407	567.12.27 庚子
八	子庚子	566.12.22	正、七丙午	子庚子 303	566.12.27 乙巳
九	子甲午	565.12.10	正、十八辛亥	子甲午 681	565.12.27 辛亥
十	子己丑闰	564.11.30	正、廿八丙辰	子己丑 32	564.12.27 丙辰
十一	子癸丑	563.12.19	正、十壬戌	子壬子 955	563.12.27 辛酉
十二	子丁未闰	562.12.8	正、廿一丁卯	子丁未 306	562.12.27 丙寅
十三	子辛未	561.12.26	正、二壬申	子辛未 202	562.12.27 壬申
十四	子乙丑	560.12.15	正、十三丁丑	子乙丑 580	560.12.27 丁丑
十五	子庚申	559.12.5	正、廿四癸未	子己未 958	559.12.27 壬午

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
襄十六	亥甲寅闰	558.11.24	二、五戊子	亥甲寅309	558.12.27 丁亥
十七	子戊寅	557.12.22	正、十六癸巳	子戊寅205	557.12.27 壬辰
十八	子壬申	556.12.1	正、廿七戊戌	子壬申583	556.12.27 戊戌
十九	亥丁卯闰	555.11.21	二、九甲辰	亥丙寅961	555.12.27 癸卯
二十	子辛卯	554.12.10	正、十九己酉	子庚寅857	554.12.27 戊申
廿一	亥乙酉闰八	553.11.28	二、一甲寅	丑甲寅753	552.12.27 癸丑
廿二	子戊申	552.12.16	正、十二己未	子己酉104	552.12.27 己未
廿三	子癸卯闰	551.12.6	正、廿三乙丑	子癸卯482	551.12.27 甲子
廿四	子丁卯	550.12.25	正、四庚午	子丁卯378	550.12.27 己巳
廿五	子辛酉	549.12.13	正、十五乙亥	子辛酉756	549.12.27 甲戌
廿六	子丙辰	548.12.3	正、廿五庚辰	子丙辰107	548.12.27 庚辰
廿七	亥庚戌闰四	547.11.22	二、七丙戌	亥庚戌485	547.12.27 乙酉

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
襄廿八	子甲戌	546.12.11	正、十八辛卯	子甲戌 381	547.12.27 庚寅
廿九	子戊辰闰五	545.11.29	正、廿九丙申	丑戊戌 277	546.12.27 乙未
三十	子壬辰	544.12.18	正、十辛丑	子壬辰 655	544.12.27 辛丑
卅一	子丁亥	543.12.8	正、廿一丁未	子丁亥 6	543.12.27 丙午
昭　元	亥辛巳闰十	542.11.27	二、二壬子	亥辛巳 384	542.12.27 辛亥
二	子甲辰	541.12.14	正、十四丁巳	子乙巳 280	541.12.27 丙辰
三	子己亥	540.12.4	正、廿四壬戌	子己亥 658	540.12.27 壬戌
四	亥甲午闰四	539.11.24	二、五丁卯	子癸亥 554	539.12.27 丁卯
五	子戊午	538.12.13	正、十六癸酉	子丁巳 932	538.12.27 壬申
六	子壬子闰七	537.12.1	正、廿七戊寅	子壬子 283	537.12.27 子丑
七	子丙子	536.12.20	正、八癸未	子丙子 179	536.12.27 癸未
八	子庚午闰八	535.12.9	正、十九戊子	子庚午 557	535.12.27 戊子
九	子甲午	534.11.28	正、一甲午	丑甲午 453	534.12.27 癸巳

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
昭 十	子戊子	533.12.16	正、十二己亥	子戊子 831	533.12.26 戊戌
十一	子癸未闰	532.12.6	正、廿二甲辰	子癸未 182	532.12.27 甲辰
十二	子丙午	531.12.24	正、四己酉	子丁未 78	531.12.27 己酉
十三	子辛丑	530.12.14	正、十五乙卯	子辛丑 456	530.12.27 甲寅
十四	子丙申	529.12.3	正、廿五庚申	子乙未 834	529.12.26 己未
十五	亥庚寅闰八	528.11.22	二、七乙丑	亥庚寅 185	528.12.27 乙丑
十六	子甲寅	527.12.11	正、十七庚午	子甲寅 81	527.12.27 庚午
十七	子戊申闰	526.11.30	正、廿九丙子	子戊申 459	526.12.27 乙亥
十八	子壬申	525.12.18	正、十辛巳	子壬申 355	525.12.26 庚辰
十九	子丙寅	524.12.7	正、廿一丙戌	子丙寅 733	524.12.27 丙戌
二十	亥庚申闰八	523.11.26	二、二辛卯	子庚寅 629	523.12.27 辛卯
廿一	子乙酉	522.12.16	正、十三丁酉	子甲申 1007	522.12.27 丙申

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
昭廿二	子己卯闰	521.12.4	正、廿四壬寅	丑戊申 903	521.12.26 辛丑
廿三	子壬寅	520.12.22	正、六丁未	子癸卯 254	520.12.26 丙午
廿四	子丁酉	519.12.12	正、十六壬子	子丁酉 632	519.12.27 壬子
廿五	子壬辰闰	518.12.2	正、廿七戊午	子辛卯 1010	518.12.27 丁巳
廿六	子丙辰	517.12.20	正、八癸亥	子乙卯 906	517.12.26 壬戌
廿七	子庚戌	516.12.9	正、十九戊辰	子庚戌 257	516.12.26 丁卯
廿八	亥甲辰闰五	515.11.28	二、一癸酉	子甲辰 635	515.12.27 癸酉
廿九	子戊辰	514.12.17	正、十二己卯	子戊辰 531	514.12.27 戊寅
三十	子壬戌闰五	513.12.5	正、廿三甲申	丑壬辰 427	513.12.26 癸未
卅一	子丙戌	512.12.24	正、四己丑	子丙戌 805	512.12.26 戊子
卅二	子辛巳	511.12.14	正、十四甲午	子辛巳 156	511.12.27 甲午
定　元	子乙亥	510.12.3	正、廿六庚子	子乙亥 534	510.12.27 己亥
二	亥己巳闰五	509.11.22	二、七乙巳	亥己巳 912	509.12.26 甲辰

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
定　三	子甲午	508.12.11	正、十七庚戌	子癸巳 808	508.12.26 己酉
四	子戊子闰十	507.11.30	正、廿八乙卯	子戊子 159	507.12.27 乙卯
五	子壬子	506.12.19	正、九庚申	子壬子 55	506.12.27 庚申
六	子丙午	505.12.7	正、廿一丙寅	子丙午 433	505.12.26 乙丑
七	亥辛丑闰	504.11.27	二、二辛未	子庚午 329	504.12.26 庚午
八	子甲子	503.12.15	正、十三丙子	子甲子 707	503.12.27 丙子
九	子己未	502.12.6	正、廿三辛巳	子己未 58	502.12.27 辛巳
十	亥癸丑闰六	501.11.23	二、五丁亥	亥癸丑 436	501.12.26 丙戌
十一	子丁丑	500.12.12	正、十六壬辰	子丁丑 332	500.12.26 辛卯
十二	子辛未闰	499.12.1	正、廿七丁酉	子辛未 710	499.12.27 丁酉
十三	子乙未	498.12.20	正、八壬寅	子乙未 606	498.12.27 壬寅
十四	子庚寅闰	497.12.9	正、十九戊申	子己丑 984	497.12.26 丁未

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
定十五	子癸丑	496.12.27	正、一癸丑	丑癸丑 880	496.12.26 壬子
哀 元	子丁未	495.12.16	正、十二戊午	子戊申 231	495.12.27 戊午
二	子辛丑闰	494.12.5	正、廿三癸亥	子壬寅 609	494.12.27 癸亥
三	子丙寅	493.12.24	正、四己巳	子丙寅 505	493.12.26 戊辰
四	子庚申	492.12.13	正十五甲戌	子庚申 883	492.12.26 癸酉
五	子甲寅闰	491.12.2	正、廿六己卯	子乙卯 234	491.12.27 己卯
六	子戊寅	490.12.21	正、七甲申	子己卯 130	490.12.27 甲申
七	子癸酉闰	489.12.10	正、十八庚寅	子癸酉 508	489.12.26 己丑
八	丑丁酉	488.12.29	闰十二、廿九乙未	丑丁酉 404	488.12.26 甲午
九	子辛卯	487.12.18	正、十庚子	子辛卯 782	487.12.26 己亥
十	子丙戌闰五	486.12.6	正、二十乙巳	子丙戌 133	486.12.27 乙巳
十一	子庚戌	485.12.26	正、二辛亥	子庚戌 29	485.12.26 庚戌
十二	子甲辰	484.12.15	正、十三丙辰	子甲辰 407	484.12.26 乙卯

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
哀十三	子戊戌闰	483.12.4	正、廿四辛酉	子戊戌 785	483.12.26 庚申
十四	子壬戌	482.12.23	正、五丙寅	子壬戌 681	482.12.27 丙寅
十五	子丁巳	481.12.12	正、十六壬申	子丁巳 32	481.12.26 辛未
十六	子辛亥闰	480.12.1	正、廿七丁丑	子辛亥 410	480.12.26 丙子
十七	子乙亥	479.12.20	正、八壬午	子乙亥 306	479.12.26 辛巳

三、春秋鲁历的置闰和岁首

《春秋》仅有两次闰月记载：

文公六年，闰月不告月，犹朝于庙；

哀公五年，闰月，葬齐景公。

皆书于年终、冬月之后，为年终闰月，当无可疑。前面说过，经文中虽然有一些历日干支不易认定是否月日有误，还是年终有闰。因缺乏春秋设年中闰月的确切文献和科学依据，在春秋长历中，我们悉按年终闰月排谱，王韬均作年中之闰对待。这是本谱和王韬长历的最大相异之处。

《春秋》所书 393 历日干支，绝大多数都合复原的春秋历法，不尽相符者 45 条，其中 11 条属上述情况，可用设年中闰月的办法解决。8 条为经失书月。不合复原鲁历的 45 春秋历日的情况列于表 3—8，表中同时刊出王韬长历的异同和处理方法。

表 3—8 《春秋》45历日不合复原的春秋鲁国历谱

不合《春秋》历日		王韬长历	注
隐　二	八月庚辰	王谱同	
四	(三)月戊申	王谱同	二月……戊申，失书月
桓　二	四月戊申	王作正月误	正月戊申……四月戊申必有一误
五	正月己丑	王作甲戌误	正月甲戌，己丑……必有一误
十二	八月壬辰	王谱同	
十七	二月丙午	王谱同	
庄廿八	三月甲寅	王谱同	
闵　二	八月辛丑	加闰五月合	五月乙酉……八月辛丑
僖　元	十二月丁巳	加闰十一月合	十月壬午……十二月丁巳
九	九月甲子	王谱同	九月戊辰……甲子，当为夏正
十八	八月丁亥	王谱同	
廿七	(九月)乙巳	王谱同	秋八月乙未……乙巳，失书月
廿八	(十月)壬申	王谱同	冬……狩……壬申，失书月
卅三	十二月乙巳	加闰八月合	四月辛巳……癸巳……十二月乙巳
文　九	九月癸酉	王谱同	本谱作十月朔，若闰八可合，王谱闰八亦不通
十二	十二月戊午	加闰四月合	二月庚子……十二月戊午
十三	十二月己丑	王谱同	王韬认为五月壬午亦误
十四	五月乙亥	王谱同	
宣　二	二月壬子	王谱同	

续表

不合《春秋》历日		王韬长历	注
宣 九	九月辛酉	王谱同	
十二	六月乙卯	王谱同	
十七	(二月)丁未	王谱同	正月庚子……丁未,失书月
成 二	(九月)庚寅	王谱同	八月壬午……庚寅,失书月
四	三月壬申	王谱同	
九	七月丙子	王谱同	
十	(六月)丙午	王谱同	五月……丙午,失书月
十七	十一月壬申	王谱同	
襄 二	六月壬辰	王谱同	
三	(七月)戊寅	王谱同	六月……乙未……戊寅,失书月
四	三月己酉	王谱同	
七	十二月丙戌	加闰十月合	十月壬戌……十二月丙戌
九	十二月己亥	王谱同	
廿五	八月己巳	王谱同	
廿七	七月辛巳	加闰四月合	王闰四月,将十二月乙亥朔日食改十一月乙亥朔,以合传
廿八	十二月乙未	王谱同	十二月甲寅……乙未,不合
廿九	(六月)庚午	王谱同	夏五月……庚午,失书月
昭 元	十一月己酉	加闰十月合	六月丁巳……十一月己酉
八	十月壬午	加闰八月合	四月辛丑……十月壬午
廿二	四月乙丑	王谱同	王韬十二月癸酉朔日食亦误
廿四	八月丁酉	王谱同	与五月乙未朔日食不接
廿八	七月癸巳	加闰五月合	四月丙戌……七月癸巳

续表

不合《春秋》历日		王韬长历	注
定 四	春王二月癸巳	王谱同	
	十一月庚午	加闰十月合	四月庚辰……十一月庚午
	十一月庚辰	加闰十月合	四月庚辰……十一月庚辰
十五	（十月）辛巳	王谱同	九月……丁巳……戊午……辛巳失书月
哀 三	夏四月甲午	合	本谱作三月甲午晦

很可能我国历法是在西周晚期废朏用朔的。春秋时期，犹告月、告朔，可见当为推步制定历法的早期阶段。虽斯时步朔比较准确，但很可能还没有严格的设闰标准和规范。春秋历法有没有年中闰月或年中置闰的方法，这个学术问题可以再深入研究、讨论。可是鲁历设闰欠规整、岁首尚未完全固定却是不可否认的事实。

前面说过，在有没有年中闰月问题上，王韬和我们观点稍有差异，这有时会影响到设闰的年份。加上王韬以新法得出的春秋日至约有2/3后天1日。因此在他的长历中有8年岁首建正差失1月。在春秋时期的245年中，我们复原的鲁历与王韬长历岁首建正情况比较如下：

春秋鲁历8年建寅，70年建丑，149年建子，18年建亥；《朔至考》3年建寅，67年建丑，151年建子，24年建亥；《朔闰表》1年建寅，69年建丑，151年建子，24年建亥。

春秋242年，合12章14年。按19年设7闰的章法，当设89闰。但在王韬长历和我们复原的鲁历中皆为88。由于设闰较正常闰率和章闰少，因此春秋鲁历岁首前移了1个月。大致说来，春秋早期岁首基本建丑，中、后期多数建子。由于设闰不规范，约有1/10的年份岁首有1个月的摆动。

如果再细一点考查，就可看出，岁首前移，或有意将岁首由建

丑调整为斗柄指北的子月，这件事是发生在僖、文时期。由隐公元年(前722)至僖十三年(前647)这4章76年中，共设了28闰，符合章法闰率。就是说，在这76年中，平均说来，岁首基本上建丑。而在僖元年(前659)到成七年(前584)这4章76年里，春秋鲁历共设闰27月，比19年设7闰的正常闰率，少设1闰。由此可知，成公以后鲁历岁首就大致建子了。可这样认识，大约在公元前7世纪中后期、僖文时代，基本掌握了19年7闰的合天闰率，能有把握、较准确地测定日至的日期后，就有意识地调整岁首，而以含冬至之月作为正月了。在其后的成哀时期，自宣公十八年(前591)至哀公十七年(前478)的6章114年中，鲁历共设42闰，正合19年7闰的章法，为推步历法发展的第二阶段，规范化地设闰，向前迈进了一步。

春秋历法是阴阳历，年月日皆依据天象。四时寒暑的周期是回归年，月相盈亏圆缺变化依朔望月而循环。回归年、朔望月的日数不能公约。阴阳历设置闰月的目的有两个。一是调整历年长度使其尽量与回归年接近，二是固定岁首，以便月名基本能和季节对应。规范设闰既可在较短时间内使平均历年长度与回归年相近，又可将每年的岁首稳定在斗柄某一指向的月份上。

日月同经谓之合朔。19个回归年长约6939.60日，而235个朔望月近于6939.69日。如果某年太阳在冬至点时日月会合，那么19年后的日月又将在冬至日同一黄经处相合。视太阳在黄道上运动，按中国历度，每日东移1度，一岁(约365.25日)而周。即，从冬至点出发，到太阳再回到此点，需要1回归年的时间。一个朔望月为29.5306日。历月只能取整数日，所以阴阳历中月分大小，大月30日，小月29日。与历月类似，历年也只能取整数月。年12月为354日或355日，较回归年少10～11日；13月是383或384日，比1岁又长18～19日。冬至之日黄昏时刻，北斗

斗柄大致指北——子的方位，故称含冬至之月为子月。若取子月为岁首，如某年冬至合朔齐同，以此为起点。可以看出，按1年12月计，则第4年的岁首已不在子月，而在其前之斗柄建亥之月了。只有在第3年中增加1月，使其年为13月，才会使次年岁首仍在子月，以保证时节与月名固定的对应关系。有13月之年称作闰年。所加之月是谓闰月。年月日皆依据天象，而月分大小，年有平闰，这是阴阳历的基本组成和特征。

对于岁首建子（又称子正、周正）的历法，冬至距岁首月朔的日数叫作冬至的月龄，又称闰余。在上述的19回归年中，每次冬至距其前朔日的月龄很容易算出。知道了闰余，哪一年该设闰，甚至闰月应置何处就一清二楚了。所以闰余是规范化设闰的依据。由于19个回归年正好等于235个朔望月的长度，按每历年12月计，235月比19年228月多7个月，多出之月即19历年中当设的闰月数。古称章岁19，章闰7。这样，19年设7闰，经过一章19年，平均历年长度正好与回归年相等。另一方面，每年的闰余值，或者说这样的闰月安排，又比较准确地依19年的周期重复出现，形成了阴阳历置闰的基本规律。在中国近2000年使用平气的各代历法中，它一直作为设置闰月的基本依据。

按照规范化章法设闰，在每章19年中，闰年和闰月的位置是固定的。在以冬至建子月为岁首的历法中，闰年在每章19年中的位置是第3、6、9、11、14、17和19年。闰月的具体设置方法，在介绍古六历的时候将详细讨论。由复原的春秋鲁历、王韬长历闰年位置（表3—7）看出，春秋历法虽已知19年7闰，但并未按上述规律置闰，还有一定随意性。因此约有1/10的年份岁首有1个月的摆动。说明春秋还没有掌握依闰余安排闰年的方法，而由观测而随时确定。因日至测景还不够精密，故闰年设置缺乏规律。而且不能排除可能因某种原因，如多日连续阴云、雨雪等，存在人

为设闰的情况。

从历法的发展来看，当测景确定日至比较精密，对太阳运动或回归年长度有较准确的认识以后，才会改行以子月为岁首的历法。三代三正，是否确如《尚书大传》或《史记》所言，是夏商周三代改行正朔的故事，即夏以冬至后二月，殷以冬至后一月，周以冬至月为正月。目前尚无确凿的证据。但它反映历法发展的时间顺序却是无疑的。春秋历法的建正发展过程就是一个实例。从这个意义上讲，春秋鲁历是早期推步制定历法的一个范本，研究它可以使我们得到许多更早的有关殷商西周历法的信息。

春秋鲁历步朔比较准确，但尚不认识闰余。并非如太史公所说的“黄帝考订星历，建立五行，起消息，正闰余”那样，春秋闰年安排还没有严格的规律。其后，战国时期的古六历，为折中配合年月日的长度，虽然牺牲了一点步朔的精度，但，根据闰余，建立起19年7闰的章法蔀元，和统一的年月日朔闰气推步体系，因此得到固定的岁首和规整的置闰，在历法发展上是一个很大的进步。

四、春秋鲁、晋历法的异同

春秋时期，列国自行颁历。春秋各国历史悉皆亡佚，仅一部鲁《春秋》保存了下来。《左传》杂采各国史策，收集了许多诸侯国的史料，保存了不少晋、齐、秦、楚、郑、卫等国的朔闰历日。但由于成分复杂，难以辨识，要想了解其时别国历法的情况，很不容易。

《春秋》、《左传》、《史记·晋世家》都记载了成公十七、十八年(晋厉公七、八年)晋厉公使胥童、夷羊五、长鱼矫等杀三郤，栾书、中行偃执厉公、杀胥童、弑厉公、立悼公等几件史实发生的历日。晋世家所书内容不尽与《左传》全合，但由其所记历日可考辨确为晋历。各书所述史实及所对应的历日并排于表3－9。

表 3—9 各书所述史实及所对应的历日

《春秋》	《左传》	《史记·晋世家》
成十七年十有二月丁巳朔日有食之	成十七年十二月	晋厉公八年
晋杀其大夫郤锜、郤犫、郤至	壬午，胥童、夷羊五帅甲八百……以戈杀驹伯、苦成叔……	十二月壬午，公令胥童以兵八百人袭攻杀三郤
十有八年春王正月晋杀其大夫胥童	公游于匠骊氏，栾书、中行偃遂执公焉闰月乙卯晦栾书中行偃杀胥童	闰月乙卯厉公游匠骊氏，栾书、中行偃以其党袭捕厉公，囚之。杀胥童
庚申晋弑其君州蒲	十八年正月庚申晋栾书、中行偃使程滑弑厉公	悼公元年正月庚申栾书、中行偃弑厉公
	（正月）庚午馆于伯子同氏	厉公囚六日死。死十日庚午智罃迎公子周……而立之。是为悼公
	辛巳朝于武宫	辛巳朝武宫
（正月）齐杀其大夫国佐	（正月）甲申晦齐侯使士华免以戈杀国佐	
	二月乙酉朔晋悼公即位于朝	二月乙酉即位

《春秋》书成公十六年六月丙寅朔、十七年十有二月丁巳朔日有食之，皆已确证为观测实记。十六年六月甲午晦晋侯及楚子郑伯战于鄢陵。则六月丙寅朔、七月乙未朔距十七年十二月丁巳朔分别为 17、18 月，依春秋鲁历步朔其间必有一次两大月相连。则鲁历十七年闰月、十八年正、二、三、四月朔当分别为丁亥、丙辰、丙戌、乙卯、乙酉日。

《经》言十八年春正月晋杀胥童，《传》作十七年闰月乙卯晦，

所记不一；而正月庚申晋弑厉公，《经》《传》日期无异。据此不易认定《左传》所依系何历术。《晋世家》不存在用鲁历的问题。所书栾书、中行偃执厉公、杀胥童皆为闰月乙卯日、正月庚申弑厉公，明言囚六日死，与《左传》不同。看来另有所本，不是抄自《左传》。但《晋世家》所书历日与《左传》相同。闰月乙卯至正月庚申相距5日，乙卯必为闰月最后几天。正月有庚申、庚午、辛巳，而闰月乙卯距二月乙酉仅30日。这只有乙卯为闰月晦，正月丙辰朔且为小月，才有可能。所以，《晋世家》所书闰月乙卯为晦日，二月乙酉是初一，与《左传》历日记载全同。可以考辨认定这是两条晋历的晦朔。由此可对晋历有如下认识。

第一，春秋鲁国、晋国历法是不同的。前面已考查得出成公十七年闰月朔丁亥，十八年正、二、三、四月朔分别为丙辰、丙戌、乙卯、乙酉。与晋历正月朔丙辰、二月朔乙酉不同。由此说明，不仅晋历、鲁历岁首月建不一，步朔也有差异。

第二，晋历与战国魏国所行历法也不一样。云梦秦简记载有魏安釐王二十五年闰再十二月丙午朔的历日。经分析，其时魏所行的很可能为六历中的夏历（正月建寅，以十一月甲子朔旦冬至为历元气朔）。战国时，晋分为韩、赵、魏三国。春秋晋国采用的是不是也是夏历呢？晋厉公七年（前574）入夏历戊午蔀47年，由此推得厉公八年正月甲寅朔、二月甲申朔。可确知，春秋晋国所行不为夏历。

古六历在战国后期与天较合。由于朔策比真值略大，所以约300年朔差1日。若晋厉悼所行为夏历或其他古六历，则在公元前6世纪此历势必要先天1日。表3－10列出晋厉公八年和魏安釐王二十五年这三个朔日的真实天象。可以看出它们基本与天相合，厉公时或稍有后天。均不先天。由此也可知，晋、魏所行历法是不相同的。

表 3—10 文献记载晋魏历朔合天情况

文献记载历朔				实 朔				合失天
王公	年	月	朔干支	公元前年	月日	时分	干支	
晋厉公	八	正	丙辰	573	2 17	15 34	乙卯	后天1日
晋厉公	八	二	乙酉	573	3 18	7 52	乙酉	合天
魏安釐王	廿五	闰再十二	丙午	251	1 28	22 46	丙午	合天

第六节 古六历的创制行用时代

一、古六历是四分术行用于战国秦汉初

黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁历，这六种历法，又称古六历。六历之名，始见于《汉书·艺文志》及《汉书·律历志》。

《汉书·律历志》说：

> 三代既没，五伯之末，史官丧纪，畴人子弟分散，或在夷狄，故其所记，有黄帝、颛顼、夏、殷、周及鲁历。战国扰攘，秦兼天下，未皇暇也。亦颇推五胜，而自以为获水德，乃以十月为正，色尚黑。汉兴，方纲纪大基，庶事草创，袭秦正朔。以北平侯张苍言，用颛顼历，比于六历，疏阔中最为微近。

《汉书·艺文志》记有，成帝时，太史令尹咸校数术，所录尚有历谱18家606卷，其中有黄帝五家历33卷，颛顼历21卷，颛顼五星历14卷，夏殷周鲁历14卷。《汉书》是公元1世纪班固根据其父班彪收集的材料，整理撰写成书。他死时，《汉书》的八表和天文志尚未完稿，后由其妹班昭和同郡人马续补著而成完璧。

4世纪初，晋司马彪所修《续汉书·律历志》给出六历上元甲子。论曰："黄帝造历元起辛卯，而颛顼用乙卯，虞用戊午，夏用丙寅，殷用甲寅，周用丁巳，鲁用庚子。"关于六历的具体内容、方法，《汉书》、《续汉书》中都没有完整的记述，仅有一些零星材料，但由此分析可知，六历实际上都是四分术。

《汉书》说，太初改历后27年，"元凤三年(前78)，太史令张寿王上书言，历者天地之大纪，上帝所为。传黄帝调律历，汉元年以来用之。今阴阳不调，宜更历之过也。"寿王非汉历，认为汉初行用的是黄帝调历。他说："太初历亏四分日之三，去小余七百五分。"3/4日为小余705分，可知日分为940。此为四分术的蔀月，后面将会看到，黄帝历与太初历相近，仅相差1.3小时，小余51分。而殷历后太初3/4日，故《汉书·律历志》称"寿王历乃太史官殷历也"。

《汉书·律历志》说："鲁历不正，以闰余一之岁为蔀首。"四分术称76年为蔀，每岁冬至月龄曰闰余。

在《汉书·律历志》著录的《三统历·世经》中，刘歆处处引用殷历来与三统历进行比较。所述殷历皆以76为蔀年，至朔悉合四分术。如《世经》云：

> 殷历曰，当成汤方即世用事十三年，十一月甲子朔旦冬至。终六府(蔀)首，当周公五年，则为距伐桀四百五十八岁，少一百七十一岁，不盈六百二十九。又以夏时乙丑为甲子。计其年乃孟统后五章，癸亥朔旦冬至也。以为甲子府首皆非是。凡殷世继嗣三十一王，六百二十九岁。

殷历家给出的伐桀年至三统历之伐纣共为458年。依三统

历，上元至伐桀141480岁，至伐纣142109岁。相距为629年。殷历458年，较之少171年。隐公元年（前722）上距伐纣400岁，故三统伐纣当公元前1122年。其前458年即前1580年为殷历伐桀之岁。成汤为天子用事13年崩没，其岁十一月甲子朔旦冬至，为殷历天纪纪首甲子府首，事在公元前1567年。六蔀后当周公五年，前1111年，为戊午蔀首。以下各年俱世经所记蔀首鲁史纪年，皆相距一蔀76年。

炀公二十四年（前1035）为丁酉蔀首；

微公二十六年（前959）为丙子蔀首；

献公十五年（前883）为乙卯蔀首；

懿公九年（前807）为甲午蔀首；

惠公三十八年（前731）为癸酉蔀首；

僖公五年（前655）为壬子蔀首；

成公十二年（前579）为辛卯蔀首；

定公七年（前503）为庚午蔀首；

元公四年（前427）为己酉蔀首；

康公四年（前351）为戊子蔀首；

缗公二十二年（前275）为丁卯蔀首。

公元前256年，周赧王五十九年，秦昭王五十一年，秦灭周，楚考烈王灭鲁，迁封鲁君于莒。而三统历世经鲁亡事载秦孝文王元年（前250），周灭后六年。秦始皇帝二十六年（前221），齐亡。至此，秦兼天下。到刘邦灭秦，子婴降，为公元前206年。秦朝共二世，15年。汉元年距三统上元143025岁。

这以后《世经》继书：

汉高祖八年（前199）为殷历丙午蔀首；

汉武帝元朔六年（前123）为殷历乙酉蔀首；

汉元帝初元二年（前47）为殷历地纪纪首、甲子蔀首。

四分术一蔀76年、940月，20蔀1520年为纪。一纪后蔀首日名方可复原。由上述《汉书·律历志》所书殷历蔀首日名和纪法知，实际上殷历是四分术。

《续汉书·律历志》关于六历的记述有所充实。

> 灵帝熹平四年（175），五官郎中冯光、沛相上计掾陈晃言，历元不正，故妖民叛寇益州，盗贼相续为害，历当用甲寅为元而用庚申，图纬无以庚申为元者。

议郎蔡邕曰：

> 历数精微，去圣久远，得失更迭，术无常是。汉兴承秦，历用颛顼，元用乙卯，百有二岁，孝武皇帝始改正朔，历用太初，元用丁丑，行之百八十九岁。孝章皇帝改从四分，元用庚申。今光、晃各以庚申为非，甲寅为是。案历法，黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁，凡六家，各自有元。光、晃所据，则殷历元也。他元虽不明于图谶，各自一家之术，皆有效于当时。武帝始用太初丁丑之元，六家纷错，争讼是非。太史令张寿王挟甲寅元以非汉历，杂候清台，课在下第，卒以疏阔，连见劾奏，太初效验，无所漏失。是则虽非图谶之元，而有效于前者也。及用四分以来，考之行度，密于太初，是又新元有效于今者也。

明言颛顼历，元用乙卯；光、晃所据之甲寅元，则为殷历之元。六历，各自有元。光和二年（179），刘洪上言：

> 推汉己巳元，则考灵曜旃蒙之岁乙卯元也，与光、晃

甲寅元相经纬。于以追天作历，校三光之步，今为疏阔。孔子纬一事见二端者，明历兴废，随天为节。甲寅历于孔子时效；己巳颛顼秦所施用，汉兴草创，因而不易。元至封中，迁阔不审，更用太初，应期三百改宪之节。甲寅、己巳谶虽有文，略其年数，是以学人各传所闻，至于课校，罔得厥正。夫甲寅元天正正月甲子朔旦冬至，七曜之起，始于牛初。乙卯之元人正己巳朔旦立春，三光聚天庙五度。课两元端，闰余差百五十二分之三，朔三百四，中节之余二十九。

更清楚指出，殷历、颛顼历的上元甲子和历元气朔俱不相同。用殷历推求颛顼历元气朔，得闰余差 3/152 个朔望月，合朔时刻相距 304/940 日，交节有 29/32 日的间隔。后面将看到，只有用四分法推步才会得到如此结果。

以上《汉书・律历志》、《续汉书・律历志》记载的多为殷历、颛顼历的例子。由此可大致得出六历皆为四分法。之所以历朔有别，乃上元及历元气朔不同而已。《续汉书・律历志》不仅给出了六历上元甲子，并且还记述了殷历、颛顼历历元日月相聚的星宿位置。

刘宋大明六年(462)祖冲之上大明历，世祖下之有司，使内外博议。时人少解历数，竟无异同之辩。唯太子旅贲中郎将戴法兴予以驳难。在法兴、冲之驳难辩析中，多次涉及对六历的评价。法兴议曰："夫置元设纪，各有所尚，或据文于图谶，或取效于当时。冲之云'群氏纠纷，莫审其会'。昔黄帝辛卯，日月不过，颛顼乙卯，四时不忒，景初壬辰，晦无差光，元嘉庚辰，朔无错景，岂非承天者乎。"冲之对曰："寻古历法并同四分，四分之数久则后天，经三百年，朔差一日。是以汉载四百，食率在晦。魏代以来，遂革

斯法，世莫之非者，诚有效于天也。章岁十九，其疏尤甚，同出前术，非见经典。而议云此法最古，数不可移。若古法虽疏，永当循用，谬论诚立，则法兴复欲施四分于当今矣，理容然乎?”并进一步分析说，“周汉之际，畴人丧业，曲技竞设，图谶实繁，或借号帝王以崇其大，或假名圣贤以神其说。是以谶记多虚，桓谭知其矫妄；古历舛杂，杜预疑其非直。按五纪论黄帝历有四法，颛顼、夏、周并有二术，诡异纷然，则熟识其正，此古历可疑之据一也。夏历七曜西行，特违众法，刘向以为后人所造。此可疑之据二也。殷历日法九百四十，而乾凿度云殷历以八十一为日法。若易纬非差，殷历必妄，此可疑之据三也。颛顼历元，岁在乙卯，而命历术云，此术设元，岁在甲寅。此可疑之据四也。《春秋》书食有日朔者凡二十六，其所据历，非周则鲁。以周历考之，检其朔日，失二十五，鲁历校之，又失十三。二历并乖，则必有一伪。此可疑之据五也。古之六术，并同四分，四分之法，久则后天。以食检之，经三百年，辄差一日。古历课今，其甚疏者，朔后天过二日有余。以此推之，古术之作，皆在汉初周末，理不得远。且却校春秋，朔并先天，此则非三代以前之明征矣。此可疑之据六也。寻《律历志》，前汉冬至日在斗牛之际，度在建星，其势相邻，自非帝者有造，则仪漏或阙，岂能穷密尽微，纤毫不失。建星之说，未足证矣。”“古历讹杂，其详阙闻，乙卯之历，秦代所用，必有效于当时，故其言可征也。”

古六历皆为四分之法，《宋书·律历志》的记载讲得很清楚，明言“古之六术，并同四分，四分之法，久则后天。”又指出，“考其远近，率皆六国及秦时人所造。其术斗分多，上不可检于春秋，下不验于汉魏，虽复假称帝王，只足以惑时人耳。”其实，两个世纪前，晋杜预就认为“周衰世乱，学者莫得其真。今之所传七历(外加虞历)，皆未必是时王之术也。”

《汉书》开创了纪传体断代史成书的方法和范例。它记载了

自汉高祖元年(前206)至淮阳王刘玄更始二年(24)整个西汉王朝230年间的史事。武帝以前,《汉书》基本上依据《史记》的材料。可能由于体例限制,《汉书·律历志》侧重记述了太初改历和刘歆所作的三统历及谱。而《史记·历书》著录了四分法一部76年的平闰、朔气大小余及章蔀首气朔加时的方位。因而《汉书》对汉初历法和古六历就不做全面介绍了。但,更为可能的是,斯时六历已不完整,或有的虽存上元甲子,而失其年数。战国扰攘,秦兼汉兴,楚汉相争,连年兵燹,历书历日所存无多。学人各传所闻,无法复原统一,《汉书》只得阙如。

汉末,宋仲子集七历以考春秋,案其夏周二历术数,皆与《汉书·艺文志》所记不同,故更名为真夏、真周历。晋杜预并考古今十历以验春秋,三统历仅得1食,其术最疏。所用十历,六历外,加三统、乾象、泰始(景初)、乾度等汉后四历。六历中夏周二历并皆两术,所增即宋仲子考订更名之真夏、真周历。所考日食合六历情况为:黄帝历得1食,颛顼历8食,夏历14食,真夏历1食,殷历13食,周历13食,真周历1食,鲁历13食。这结果与祖冲之考查所得相符。

《汉书·艺文志》收录的六历文献全都亡佚。现在无法知道它们的内容。杜预称汉末宋仲子集七历以考春秋,其夏周二历术数皆与艺文志所记不同,故更名为真夏、真周历。由此,斯时似尚存六历数据和步法。东汉灵帝光和二年(179)刘洪曾说,“甲寅、己巳谶虽有文,略其年数,是以学人各传所闻,至于课校,罔得厥正。”刘宋祖冲之也称,“古历讹杂,其详阙闻”,并言,“按五纪论黄帝历有四法,颛顼、夏、周并有二术,诡异纷然,则孰识其正”。由此看来,宋仲子、杜预、祖冲之考春秋历日、日食合历,依据的很可能是东汉末年学者补苴、整理、复原的六历步法和数据,而并非战国秦汉直接承传下来的术数。

黄帝、颛顼、虞、夏、殷、周、鲁诸历，因与天不合并非时王之术，已见前述，这是可以肯定的。但先秦时期确实存在古四分术却是不容怀疑的。文献及新出土的战国秦汉简牍皆可证明这一点。如《左传》中许多历日、历数均可用周历来解释。由《汉书·律历志》、《续汉书·律历志》记载可知，己巳颛顼秦所施用，汉兴草创，因而不易。故《吕氏春秋·序意》所记“维秦八年，岁在涒滩，秋甲子朔”，即合颛顼历。再有新出云梦秦简大量历日记载也与颛顼历一致。由《南郡守腾文书》所书秦王政“廿年四月丙戌朔”，《大事记》所注“今(秦王政)七年正月甲寅”，“十二年四月癸丑”，“十六年七月丁巳公终”，“廿年七月甲寅”，“廿七年八月己亥”，以及秦昭王时的几个后九月等，可知秦昭王时已行颛顼历。而云梦秦简《为吏之道》所引“魏户律”注记魏安釐王的“廿五年闰再十二月丙午朔”，经推步核验为夏历，为斯时魏所施行。

另一方面，考查分析得出，六历大都在战国时期与天相合。例如可证，颛顼历约当前 340 年前后合天，殷历约当前 430 年，鲁历约前 450 年，夏历(历元人正甲子雨水合朔)约前 460 年，真夏历(历元十一月甲子冬至合朔)约前 170 年，周历约前 210 年，黄帝历约前 190 年合天。在不同年代，六历失天大致情况如表 3—11 所示。

表 3—11　六历合失天情况

	黄帝历	周历	殷历	鲁历	真夏历	颛顼历	夏历
前 500 年		−0.9474	−0.2105	−0.1579	−1.0790		−0.1316
前 450 年	−0.8684	−0.8158	−0.1053	−0.0263	−0.9211	−0.3684	
前 400 年	−0.6842	−0.6316	0.1053	0.1842	−0.7105	−0.1842	
前 350 年	−0.6053	−0.5526	0.2368	0.2895	−0.6316	−0.1053	
前 250 年	−0.1538	−0.0769	0.6154			0.3077	0.7083

用六历推算所得合朔时刻，早于实际天象者，称作先天，以负号表示；迟者为后天。由此看出，以六历步春秋日食悉为先天。拿周历为例，若春秋行周历，在公元前500年（定公十年）前后，约有95%的合朔发生在历面的初二，合天者（初一合朔）仅占5%。《春秋》记载的37次日食，如用周历推步，全都出现在月之初二、初三日。

虽然，六历不一定恰好在其合天的时期行用，但月相昭昭，它们的颁行时代距此也不会很远。看来古六历是战国时期（前5～前3世纪）各国先后创制并施行的。春秋时期行用的肯定不是这六种汉传的古历。

二、汉传六历有些数术并非战国之旧

（一）六历上元甲子为东汉学者推算追改

古以甲子纪日，干支纪年始见于西汉。如《淮南子・天文训》所书"淮南元年冬，太一在丙子"，"太阴元始建于甲寅，一终而建甲戌，二终而建甲午，三终而复得甲寅之元"。文帝以原淮南地封刘安（高祖少子刘长之子）等三人为淮南、衡山、庐江王。原淮南王刘长与人谋反，文帝前元六年（前174）谪迁蜀地，于途中绝食而死。淮南王复封事当文帝前元十六年（前164）。《汉书・翼奉传》记"今年太阴建于甲戌"。是岁二月戊午、陇西郡大地震，坏城郭房屋，压杀人众，山崩地裂，水泉涌出，关东饥，齐地人相食。元帝下诏罪己，因赦天下。次年夏四月乙未，孝武园白鹤馆灾。据考地震事值元帝初元二年（前47）。《汉书・王莽传》新王莽在始建国五年（13）下书中称其年"岁在寿星。填在明堂，仓龙癸酉，德在中宫"；而在天凤七年下书谓："更以天凤七年，岁在大梁，仓龙庚辰，行巡狩之礼。厥明年，岁在实沈、仓龙辛巳，即土之中雒阳之都。"此外，公元初年（西汉末年和新室），刘歆在所作三统历及谱

中以甲子纪汉元、太初以来诸年。言汉兴距上元年143025岁，岁在大棣之东井22度，鹑首之6度也。故汉志曰岁在大棣，名曰敦祥，太岁在午。为十二辰当午之年。“岁术”中，推岁所在，数从星纪起；欲知太岁，数从丙子起。称太初元年(前104)岁星舍星纪次、北宫斗宿牛宿之间，甲子纪年为丙子。这里的“太一”、“太阴”、“仓龙”、“太岁”同义，悉指纪年甲子。由此诸例可知，西汉已有用干支纪年的做法，但多与岁名、岁在和丛辰配合使用。其称淮南元年(前164)、太初元年(前104)为丙子，汉高祖元年为午年，这与言元帝初元二年(前47)甲戌，新王莽始建国五年(13)癸酉，天凤七年、八年为庚辰、辛巳互相抵牾。说明西汉处在始创时期，干支纪年尚未普及，还没有理顺历代王世王年与甲子纪年的关系。东汉以后，谶纬盛行，《考灵曜》、《命历序》皆有甲寅元。孝章皇帝元和二年改行四分。甲寅元所起在四分庚申元后114岁。因此，元和改历以后，不断有人以谶无明文而非四分。促使历算家疏理历代纪年，以谋求四分合于图谶之依据。顺帝汉安二年(143)，太史令虞恭、治历宗䜣等论证：建历之本，必先立元，元正然后定日法，法定然后度周天以定分至。三者有程，则历可成也。四分历仲纪之元，起于孝文皇帝后元三年(前161)，岁在庚辰。上45岁，岁在乙未，则汉兴元年也。又上275岁，岁在庚申，则孔子获麟。276万岁，寻之上行，复得庚申(文帝仲纪之元，加605元1纪，上得庚申)。岁岁相承，从下寻上，其执不误。此四分历元明文图谶所著也。太初元年岁在丁丑，上极其元，当在庚戌(《汉书·律历志》三统历谓，太初元年距上元143127岁，为2385甲子周期又27年，以丁丑岁上推，历元当庚戌岁)，而曰丙子，言144岁超1辰，凡993超，岁有空行82周有奇，乃得丙子(143127为144、岁星岁数1728除，分别得993及82，另有奇零135、1431)。与西汉所纪不同。明确称太初元年(前104)、孝文后元三年(前

161)、汉兴元年(前206)、获麟(前481)年之甲子分别为丁丑、庚辰、乙未和庚申。由此向上寻之,复得四分、太初上元为庚申(公元前2760481年)和庚戌岁(公元前143231年)。至此,按60周期追正了自西周共和以来历代各王世王年之甲子。中国历史上干支纪年方法才完善起来。《续汉书·律历志》记载的蔡邕、刘洪谓颛顼历元用乙卯,冯光、陈晃所据甲寅乃殷历之元,及历论给出的六历上元甲子,都是在此基础上推算追正的。

(二)六历上元积年亦当为东汉学者推算附人

仅知上元甲子还不够,直到《大唐开元占经》完整地给出了六历的上元干支和积年,汉传古六历的情况才算比较清楚了。《开元占经》卷一〇五《古今历积年及章率》所传六历上元甲子除夏历外皆与《续汉书·天文志》相同,积年都在2761000左右。

积年之法,创始于刘歆三统历。上推日月相合,五星会终,得一会2626560岁,三会为一统7879680,三统23639040,而复于太极上元。《春秋纬·元命包》、《易纬·乾凿度》皆以为开辟至获麟2760000岁。为证实四分历本起图谶,最得其正,选取仲纪之元,起于孝文皇帝后元三年,岁在庚辰,上45岁,岁在乙未,为汉兴元年。又上275岁庚申获麟,又上2760000复得庚申,作为四分上元之岁。下距文帝后元三年(前161)庚辰2760320。今观开元占经所载六历上元积年悉与谶纬开辟之元2760000,三统七政会合之期2626560及后汉四分历庚申上元之数2760320相颉颃,可知六历上元积年的选取与三统、四分和谶纬开辟诸数不无关系,并非战国之旧。

(三)颛顼历元数有更易

东汉刘洪说,甲寅历于孔子时效,己巳颛顼秦所施用。己巳

元即《考灵曜》旃蒙之岁乙卯元。蔡邕也称，颛顼历元用乙卯，冯光、陈晃所据甲寅则殷历之元，颛顼历元人正正月己巳朔旦立春，俱以日月起于天庙营室5度(《月令论》)。刘洪进一步指出，甲寅元(殷历)天正正月甲子朔旦冬至，七曜之起始于牛初。(颛顼历)乙卯之元人正己巳朔旦立春，三光聚天庙5度。课两元端，闰余差3/152月，朔304，中节之余29。

蔡邕、刘洪是东汉桓灵时人(2世纪后期)。对古四分术，公元前2世纪成书的《淮南子》是这样说的：紫宫执斗而左旋，日行1度以周于天。日冬至峻狼之山(南极之山)。日移1度，凡行182 $\frac{5}{8}$度，而夏至牛首之山(北极之山)，反复365 $\frac{1}{4}$度而成一岁。天一元始，正月建寅，日月俱入营室5度。天一以始建76岁，日月复以正月入营室5度，无余分，名曰一纪。凡20纪，1520岁大终。日月星辰复始甲寅元。日行1度，而岁有奇1/4度。故4岁而积1461日。而复合故舍，80岁而复故日。又称，太阴元始建于甲寅，一终而建甲戌，二终而建甲午，三终而复得甲寅之元。

《续汉书·律历志》对四分术的特征是这样记述的：日周于天，一寒一暑，四时备成，万物毕改，摄提迁次，青龙移辰，谓之岁。岁首至也，月首朔也。至朔同日谓之章，同在日首谓之蔀，蔀终六旬谓之纪，岁朔又复谓之元。历数生也，乃立仪表，以校日景。景长则日远，天度之端也。日发其端，周而为岁，然其景不复，4周1461日，而景复初，是则日行之终。以周除日得365 $\frac{1}{4}$度，为岁之日数。日日行1度，亦为天度。察日月俱发度端，日行19周，月行254周，复会于端，是则月行之终也。以日周除月周，得1岁周天之数。以日1周减之，余12 $\frac{17}{19}$，则月行过周及日行之数也，为1岁之月。以除1岁日，为1月之数。冬至之分积如其法得1日，4

岁而终,月分成闰,闰7而尽,其岁19,名之曰章。章首分尽,四之俱终,名之曰蔀。以1岁日乘之,为蔀之日数也。以甲子名之,20而复其初,是以20蔀为纪。纪岁青龙未终,三终岁后复青龙为元。

四分历岁余4年积1日,1岁之余为1/4日,故曰四分。冬至时刻每岁较365日移后1/4日,4岁1461日日始又恢复起始位置。80岁29220日正好为4和60的公倍数(487甲子),余分皆尽,冬至又起于甲子日始。故《淮南子·天文训》谓,80岁而复故日。《续汉书·律历志》云,"纪岁青龙未终,三终岁后复青龙为元",这与《淮南子·天文训》称"三终而复得甲寅之元",含义全同。只不过《续汉书·律历志》未实指元首岁名而已。青龙即前文苍龙,即现在说的纪岁甲子。

综上可知,《淮南子·天文训》记述了一种古代四分历。这可能是关于四分术最早的传世文献。根据所书"天一元始,正月建寅,日月俱入营室五度"的岁首建正和历元太阳位置,与上述蔡邕月令论、刘洪论月食中所说的颛顼历相合。因而可认定《淮南子·天文训》记述的是颛顼历。但蔡邕明言,"颛顼元用乙卯"、"天元正月己巳朔旦立春,俱以日月起于天庙营室五度";刘洪也称,"推汉己巳元,则《考灵曜》旃蒙之岁乙卯元也","乙卯之元人正己巳朔旦立春,三光聚天庙五度"。由此可见,在西汉前期,颛顼历仍以焉逢摄提格甲寅为元。颛顼元用乙卯乃东汉学者所为,数有更易。仅此一例可证,汉传六历法数已非战国汉初之旧。

(四)历元和步法可能也有变化

战国时期成书的《左传》记载有分至启闭。僖五年传云:"春王正月辛亥朔,日南至。公既视朔,遂登观台以望,而书,礼也,凡分至启闭,必书云物,为备故也。"这里的分至为二分二至;启,立

春、立夏;闭,立秋、立冬。知至迟战国时期已有八节。战国文献《楚辞》、《吕氏春秋》中有霜降、白露、小暑等节气名称。又有"蛰虫始振"、"始雨水"、"溽暑"、"霜始降"等称谓。但既与后世所传节、候名称不尽相同,又没有形成体系。完整的二十四节气名称始见于《淮南子·天文训》。

《史记·历书》云:"王者易姓受命,必慎始初,改正朔易服色,推本天元,顺承厥意。"颁历是君权神授的象征。臣民奉谁的正朔就表示接受他的统治。因此,"自殷周皆创业改制",至清末三千多年,中国历法数十改,制历逾百家,是世界上历法科学最发达的国家。颁行的历法中,除太平天国天历外,全是阴阳合历。年月日悉依据天象得出,这是阴阳历的典型特征。中国以农业立国。顺应天时,安排农事是中国历法的主要功能。所以《尚书·尧典》说,"乃命羲、和,钦若昊天,历象日月星辰,敬授民时"。《史记·太史公自序》曰:"夫春生、夏长、秋收、冬藏,此天道之大经也,弗顺则无以为天下纲纪。故曰,四时之大顺,不可失也。"二十四节气就是为这个目的而设置的。两千多年来,我国农民耕田播种收割贮藏完全按节气行事。故中历又被称作农历。

清代以前,历法一直采用平气,二十四气由回归年等分而成。清至今日,以定气注历。将黄道均分 24 份,每份 15°,太阳运行到每个分点,即为交节之时。由于它的时日,由回归年或太阳运动决定,长度与月亮朔望盈亏无关,属于阳历系统,使中历具有很强的阳历性质。另外,二十四气是中国的独创,也是中历有别于其他国家历法和阴阳历的关键所在。

二十四节气是在四时八节基础上发展而成。殷周之际已知四时,春秋至迟战国已有分至启闭八节,四立为四时之始,分至是四季之仲。完整的二十四气名称虽始见于《淮南子》,而节气体系则可能形成于战国末期。至今在传世或出土的秦汉初文献、简牍

中还未发现以八节之外十六气注记的历日。东汉历简似也未见。当然，这并非说西汉历法只用八节没有其他节气。因为西汉施行太初历以后，置闰依闰余或中气而定。文献和简牍中年中闰月屡有所见。王莽之际，刘歆作三统，规定“朔不得中，是谓闰月”。就是说在哪一个朔望月中没有中气，即以该月为闰月。三统历统术中，刘歆并给出计算闰月和二十四气的推步方法。

所以，至迟在两汉施行三统历时期，已将二十四气引入历法，并用以确定年中闰月的位置。秦至汉初历法都没有采用无中置闰，而将闰月置于年终，称后九月。是时以冬至总在历法中固定的月份作为设置闰月的依据，如天正历法的正月或寅正历法的十一月。

秦至汉初，已有二十四气制度，但历法中并未依此作为设闰的依据。古六历先后创制于战国，并分别在战国、秦汉初时期行用。战国时代更早，二十四节气或不完整，或还没有形成体系。杜预、祖冲之悉依无中置闰法，以汉传古六历研究春秋历日和日食的合历情况。先秦时期是否使用这种闰法，是很值得怀疑的。而且目前亦无可靠的材料予以证实。云梦秦简《为吏之道·魏户律》所书“廿五年闰再十二月丙午朔”，朔闰俱合夏历，但夏历是年无中之月适在年终，无法判断其时确切的闰法。《左传》有年中闰月的记载，如文公元年闰三月，《史记》引之，知所记确系先秦旧文，但学者全都予以否定。昭二十年闰月，夹在八月、十月记事之中。我们前节已指出，是否为闰八月，仍有可议之处。无中置闰是历法的一种推步方法，有其规律可循。退一步讲，左传或秦简中如确有某个年中闰月记载，孤证单行也不足为征。根据对春秋历日的考查及上面对二十四气的分析，鲁国历法及战国六历很可能仍采用年终闰。杜预、祖冲之采用的无中置闰法，以及所称颛顼历以小雪中气必在十月作为置闰标准等步法，可能均非战国六

历之术数。无中置闰法与固定冬至月闰法不仅闰月有别，对于采用夏正的历法，如颛顼历、夏历，其设置闰月的年份也不尽相同。

第七节 六历法数与推步

一、六历法数

汉传古六历，都是四分法，所差者仅上元和历元气朔不同而已。四分术法数如下：

章岁 19　　章闰 7　　章月 235

蔀岁 76　　蔀月 940　　蔀日 27759

元法 4560　　纪法 1520

$$1\text{岁日数}=\text{蔀日}/\text{蔀岁}=27759/76=365\frac{1}{4}\text{日}$$

岁的余分 4 年积 1 日，每岁 1/4 日，故曰四分。

$$1\text{岁月数}=\text{蔀月}/\text{蔀岁}=940/76=12\frac{28}{76}=12\frac{7}{19}\text{月}$$

$$1\text{月日数}=\text{蔀日}/\text{蔀月}=27759/940=29\frac{499}{940}\text{日}$$

$$\text{中节日数}=\text{岁实}/24=365\frac{1}{4}/24=15\frac{7}{32}\text{日}$$

阴阳合历的年月日全依据天象，年、月的长度皆不能为日整除，而历法要求历年所含的月、历月的日悉为整数。在阴阳历中，年只能取 12 或 13 个月；月必须定为 29、30 日。年 12 月称平年、13 月叫闰年，所加之月谓闰月；月 30 日为大月，29 日是小月。农事活动有很强的时间性，为了保证岁首稳定，时节与月名有紧密的对应关系，就要求及时地设置闰月，以便历年的平均长度在较短的周期内与回归年相近。这就是历法所说的“以闰月定四时成岁”。同样，月相醒目，易于识辨，必须安排大小月，才能调整日序

与盈亏相侔。1 岁比 12 月长出 7/19 个朔望月。显然，19 个回归年(岁)包含有 235 个朔望月($19\times12\frac{9}{17}$月＝235 月)，比 19 个平年(19×12＝228)多 7 个月。因此，只要在 19 历年中，设 7 个闰月。这样，19 个历年长度与 19 个回归年的长度正好相等。就是说，只要在 19 个历年中，安排 12 个平年、7 闰年，则在这个时间里得出的历年平均长度与回归年完全一致。四分法称 19 年为章，章 235 月内有闰月 7。

若某年天正月合朔和冬至同日同时并恰好在夜半(0^h)。那么 19 年(1 章)后，冬至和合朔又会同日同时，但时刻不在夜半 0^h 而是 18^h。因为

$$19\text{个冬至相距}=19\times365\frac{1}{4}=6939\frac{3}{4}\text{日}$$

$$235\text{个朔望月长}=235\times29\frac{499}{940}=6939\frac{3}{4}\text{日}$$

4 章为蔀，蔀 76 年是 940 月、27759 日。故一蔀后，至朔同日同时(相齐)又起于夜半。

20 蔀为纪，1 纪 1520 年、555180 日。日数可为 60 除尽。故，1 纪后，至朔、日名方可复原。

3 纪为元，1 元 4560 年，为 60 的整数倍。这样，1 元后，至朔、日名、岁名悉皆复初。所以，元是四分法气朔、纪年、纪日干支悉数复始的大循环周期。

综上所述，四分法章蔀纪元有下列关系：

至朔相齐谓之章，同在日首谓之蔀，蔀终六旬谓之纪，岁朔又复谓之元。

每年岁始，冬至与天正合朔间的时距称作闰余。由此定义知，闰余实际上就是冬至月龄。它可用日，也可用月的分数来表示。是四分法设闰的依据。古六历除颛顼外，其他五历皆建子，

以含冬至之月为正月。蔀首之年(称入蔀第1年),冬至合朔相齐起于甲子日夜半。冬至月龄,即闰余为0。年12月。而1岁,即冬至到下一冬至相距 $365\frac{1}{4}$ 天、$12\frac{7}{19}$ 个月。次年(入蔀第2年)岁始,天正正月朔大余54,小余348(以940为分母);冬至大余5,小余8(以32为分母)。至朔相距(冬至月龄或闰余)$10\frac{827}{940}$ 日,即 $\frac{7}{19}$ 月。再一年(入蔀第3年)岁始,天正月朔大余48,小余696;冬至大余10,小余16。至朔相距,即冬至月龄或闰余为 $21\frac{714}{940}$ 日、$\frac{14}{19}$ 月。

由于回归年(冬至到冬至)比12个朔望月长 $10\frac{827}{940}$ 日或 $\frac{7}{19}$ 月,若以每年12个月,则3年后岁始之月合朔将与冬至相距 $32\frac{601}{940}$ 天或 $1\frac{2}{19}$ 月。大于1个月。这样,岁首将不是建子而成为冬至前斗柄指亥之月了。为保证岁首斗建不移,就必须在其前一年设1闰月。这样,四分法中入蔀第3年为闰年,有13个月。置了闰月之后,四分术入蔀第4年岁始,天正月朔大余12,小余603;冬至大余15,小余24。岁首仍为建子,含冬至之月。岁始闰余 $3\frac{102}{940}$ 日或 $\frac{2}{19}$ 月。

上列各朔,至大小余数值是这样得出的:

$$12\text{朔望月}=12\times 29\frac{499}{940}=354\frac{348}{940}\text{日}$$

$$\text{冬至到冬至}=\text{回归年长}=365\frac{1}{4}=365\frac{235}{940}\text{日}$$

两数相减,得 $10\frac{827}{940}$ 日。朔望月长 $29\frac{499}{940}$ 日,$\frac{7}{19}$ 月为 $\frac{7}{19}\times$

$29\frac{499}{940}=10\frac{827}{940}$日，各年大小余计算，皆与此类似。

古以甲子纪日，甲子以 60 为周期。历法计算推得的日数要化为干支，必须去掉 60 的倍数。求出的小于 60 之余数值称作大余。为此可以用累减 60 的方法，对于较大的数值这样做可能太麻烦，所以多采用以 60 来除，所得整数去之，余数即为所求之大余值。中历推步常要碰到求余数的计算。本书以后将用方括号外加下标 R 表示这种求余的算法。例如

$$\text{合朔大小余} = \left[N \times 29\frac{499}{940}/60\right]_R$$

$$\text{冬至大小余} = \left[M \times 365\frac{1}{4}/60\right]_R$$

或表示为下列同余式

$$N \cdot \text{朔望月} \equiv \text{合朔大小余} (\bmod 60)$$

$$M \cdot \text{回归年} \equiv \text{冬至大小余} (\bmod 60)$$

上例中，N、M 为正整数。同余式中 N、M 可为任意整数、分数或小数。

闰余注以月的分数形式比较整齐直观。故常以 1/19 月为单位表示之。如，蔀首之年闰余为 0，入蔀 2 年闰余 7，3 年 14，4 年 2，5 年 9，6 年 16，7 年 4，8 年 11，9 年 18，等等。为各年岁始之值。其值自 0 始，止于 18，每年增加 7。某年加 7 其值等于或大于 19，则斯年置闰，闰余值加 7 后减 19 为次年岁始值。即，岁始闰余大于等于 12 之年闰，设 13 月。通常闰月置其年年终。如此，虽可保持岁首建正稳定，但有些时候，如岁始闰余为 17、18 等大数值年份，时令与月名可有较多偏离。为解决这个问题，于是就发展形成了年中置闰的方法。

早年设年中闰月，仍是采用闰余来确定。闰余每年增加 7，即冬至月龄每年加大$\frac{7}{19}$月或 $10\frac{827}{940}$日。年 12 月，则相当每月闰余

增$\frac{7}{19}/12=\frac{7}{228}$月。岁始闰余大于12(分子分母各乘以12,可写成$\frac{144}{228}$月)之年有闰,当闰何月,则用岁始闰余累加7/228月,当其和等于或刚超过1个月($\frac{228}{228}$月)时,是月即为闰月。就是说,自冬至月数起(是月不计),计数达到或超过$\frac{228}{228}$月所加之7/228的次数,即得该闰之月名。年中闰月的设置,可以较早地调整时令的偏移。

秦汉以后,历法中引入二十四气,特别是三统历规定"朔不得中,是谓闰月"后,农时、节气在历法中的位置更加稳定。自此至今2000年来,历法中的闰月都是按照这个原则设置的。八节中,二分二至昏时,斗柄指向子午卯酉、北南东西四正向;时值仲春、仲秋、仲夏、仲冬四"仲",称作"中"。立春、立夏、立秋、立冬四立,时当四孟,斗指东北、东南、西南、西北四维,是谓"节"。故《汉志》曰,"启闭者,节也;分至者,中也。"由此,将二十四气分为中、节。十二气为中气,十二气是节气。冬至为二十四气之首,斗柄指子,为中气。自冬至开始,中节相间,二十四气依次排列。《左传》云:"先王之正时也,履端于始,举正于中,归余于终。履端于始,序则不愆;举正于中,民则不惑;归余于终,事则不悖。"三统历据此规定,"节不必在其月","时中必在正数之月"。每个月都有固定对应的中气,每个中气必须保持在历法规定的月中。例如,冬至为天正月(子月)中气,大寒为地正月(丑月)中气,雨水为人正月(寅月)中气,春分为卯月中气,等等。它们不能出现在历法上其他的月份之中。岁终置闰只能保持岁首稳定,冬至总在子月,但不能维系其他中气一一与规定的月名对应。

四分术每气长$15\frac{7}{32}$天。一中一节为$30\frac{14}{32}$日,比一朔望月多

852.25/940 日(0.9066489362 日),合 1.030701754 月($1\frac{7}{228}$月)。1 岁二十四气,章 19 年正好与 19 岁等长。一章 19 年中有 456 气,内 228 节气,228 中气。章月 235。这样 235 个朔望月中,总有 7 个月内没有节气,另外 7 个月里没有中气。根据"朔不得中,是谓闰月",就将不含中气的这 7 个月作为章内的闰月。这种置闰方法称作"无中置闰法"。

岁首闰余大于$\frac{12}{19}$月($\frac{144}{228}$月)的年份,每月累加$\frac{7}{228}$月,当其和积满 1 整月$\left(\frac{228}{228}\right)$的月份,即是闰月。前面介绍的这种置年中闰月方法确定的闰月,有时前后还会有 1 个月的摆动。比之无中置闰稍为逊色。后者能保持每年中气悉在规定的月份之内。各月的节气在本月的上半月或前月的下半月之间。使得与农业生产紧密相关的二十四气日期,总在它的平均时刻前后不出 15 天的范围之内。基本可以满足农事活动的需要。

无中置闰法与岁终闰法(又称固定冬至月闰法)不仅闰月位置不同,对于岁首建寅(夏正、寅正)的历法,设置闰月的年份也有一定参差。而这个差别对采用周正(建子、子正)的历法却并不存在。也就是说,对于黄帝、殷、周、鲁历而言,设年中闰、年终闰的年份是一致的。古六历在一蔀内,年中、年终闰月位置列于表 3—12可供参考。

四分术的元(4560 年)是至朔、日名、年名悉数复始的大循环周期。由六历各元首的年名、日名可依次列出各纪首岁名及各蔀首的日名和岁名。根据四分术法数可很方便地算出一蔀 76 年 940 月 1824 个节气的朔气积日和大小余、每年岁始闰余值和每年的月数。这样,欲推算任一年的历日气朔,只要求出是年所入纪、蔀年数,即可很容易地查出和推得。可是《汉书》、《续汉书》都没

表 3—12　古六历一蔀内闰月位置表(固定冬至月闰月置年终)

入蔀年＼闰法＼历	黄帝、殷、周(建子、冬至)		鲁历(闰余1，建子、冬至)		夏历(建寅，历元冬至)		夏历(建寅，历元雨水)		颛顼(建寅，立春，十月)	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
1										
2					闰		闰		后九月	后九(闰四)
3	闰	闰八月	闰	闰六月		闰六月		闰八月		
4										
5					闰		闰		后九月	后九(闰十二)
6	闰	闰五月	闰	闰三月		闰三月		闰五月		
7									后九月	后九(闰九)
8			闰	闰十二月	闰	闰十二月	闰			
9	闰	闰二月						闰二月		
10					闰				后九月	后九(闰六)
11	闰	闰十一月	闰	闰八月		闰九月	闰	闰十一月		

续表

历 / 闰法 / 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
12										
13					闰		闰		后九月	后九（闰二）
14	闰	闰七月	闰	闰五月		闰五月		闰七月		
15									后九月	
16					闰		闰			后九（闰十）
17	闰	闰三月	闰	闰二月		闰正月		闰三月		
18					闰				后九月	后九（闰七）
19	闰	闰十二月	闰	闰十一月		闰十月	闰	闰十二月		
20										
21					闰		闰		后九月	后九（闰四）
22	闰	闰九月	闰	闰七月		闰七月		闰九月		

续表

历法 / 闰 / 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
23										
24					闰		闰		后九月	后九（闰正）
25	闰	闰五月	闰	闰三月		闰三月		闰五月		
26									后九月	后九（闰九）
27			闰	闰十二月	闰	闰十一月	闰			
28	闰	闰正月						闰正月		
29					闰		闰		后九月	后九（闰五）
30	闰	闰十月	闰	闰九月		闰八月		闰十月		
31										
32					闰		闰		后九月	后九（闰二）
33	闰	闰七月	闰	闰五月		闰五月		闰七月		

续表

历法 / 闰 / 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
34										
35					闰		闰		后九月	后九（闰十一）
36	闰	闰三月	闰	闰正月		闰正月		闰三月		
37					闰				后九月	后九（闰七）
38	闰	闰十一月	闰	闰十月		闰九月	闰	闰十一月		
39										
40					闰		闰		后九月	后九（闰三）
41	闰	闰九月	闰	闰七月		闰七月		闰七月		
42										
43					闰		闰		后九月	后九（闰正）
44	闰	闰六月	闰	闰三月		闰四月		闰六月		

续表

历 闰法 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
45									后九月	后九（闰九）
46			闰	闰十一月	闰	闰十二月	闰			
47	闰	闰二月						闰二月		
48					闰		闰		后九月	后九（闰五）
49	闰	闰十月	闰	闰九月		闰八月		闰十月		
50										
51					闰		闰		后九月	后九（闰二）
52	闰	闰七月	闰	闰六月		闰五月		闰七月		
53										
54					闰		闰		后九月	后九（闰十一）
55	闰	闰四月	闰	闰二月		闰二月		闰四月		

续表

历 闰法 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
56					闰				后九月	后九（闰七）
57	闰	闰十二月	闰	闰十月		闰十月	闰	闰十二月		
58										
59					闰		闰		后九月	后九（闰三）
60	闰	闰八月	闰	闰七月		闰六月		闰八月		
61										
62					闰		闰		后九月	后九（闰十二）
63	闰	闰五月	闰	闰四月		闰三月		闰五月		
64									后九月	后九（闰九）
65			闰	闰十二月	闰	闰十二月	闰			
66	闰	闰二月						闰二月		

续表

历法 闰 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
67					闰		闰		后九月	后九（闰六）
68	闰	闰十月	闰	闰八月		闰八月		闰十月		
69										
70					闰		闰		后九月	后九（闰二）
71	闰	闰六月	闰	闰五月		闰四月		闰六月		
72									后九月	
73					闰		闰			后九（闰十）
74	闰	闰三月	闰	闰二月		闰正月		闰三月		
75					闰				后九月	后九（闰七）
76	闰	闰十二月	闰	闰十月		闰十月	闰	闰十二月		

有记载六历起算的年数,使人无从下手。直到《开元占经》给出六历上元甲子和积年,由此布算所得结果与各代史志、纬书中的零散记述互相印证,六历情况才算比较清楚了。

《开元占经》所传六历上元甲子及积年,数据如下:

古今历上元以来至今开元二年(714)甲寅岁积

黄帝历上元辛卯至今 2760863 年,当前 2760150;

颛顼历上元乙卯至今 2761019 年,当前 2760306;

夏历上元乙丑至今 2760589 年,当前 2759876;

殷历上元甲寅至今 2761080 年,当前 2760367;

周历上元丁巳至今 2761137 年,当前 2760424;

鲁历上元庚子至今 2761334 年,当前 2760621。

《续汉书》谓夏历上元用丙寅,与《开元占经》不同。依据夏历校验春秋史日、日食及战国简牍考知,上元应为乙丑,《开元占经》所传为是。

二、六历步法

(一)推入蔀年

置上元至所求年积年,满元法 4560 去之,所余在纪法 1520 以下者,即入天纪年数;以上者,满 1520 去之,余为入地纪年数;如满 3040,去之,余为入人纪年数。

置入纪年以部法 76 除之,所得及余数加 1,分别为所入蔀及入蔀年。即

$$入元年 = [上元积年 / 元法 4560]_R$$

$$入纪年 = 入元年 / 纪法 1520$$

$$= 入纪数\frac{入纪年}{1520} = \begin{cases} 0\ \dfrac{入天纪年}{纪\quad 法} \\ 1\ \dfrac{入地纪年}{纪\quad 法} \\ 2\ \dfrac{入人纪年}{纪\quad 法} \end{cases}$$

$$入蔀年 = 入纪年/蔀法\ 76 = 入蔀数\frac{入蔀年}{76}$$

得数、余数皆自1起，算外（1不计入），即，商、余皆加1，为入纪、蔀数，入纪、蔀年。

（二）求积月、闰余

$$（入蔀年-1）\times\frac{章月\ 235}{章法\ 19} = 积月\frac{闰余}{章法\ 19}$$

黄帝、颛顼、夏、殷、周五历用此式。鲁历为：

$$[（入蔀年-1）\times 章月\ 235 + 部首闰余\ 1]/ 章法\ 19$$

$$= 积月\frac{闰余}{章法\ 19}$$

鲁历推步详见下节。

（三）求朔积日、大小余

$$朔积日 = 积月 \times 蔀日\ 27759/ 蔀月\ 940$$

$$正朔大小余 = [朔积日 /60]_R$$

大余从所入蔀名起，算外（蔀首日名不计），则得黄帝、殷、周、鲁历天正朔，颛顼、夏历人正朔。小余441以上，其月大。

$$次月朔大小余 = 正朔大小余 + 29 + \frac{499}{940}$$

累加，得各月。大余满60去之，小余满940，得1，进位，从大余。

(四)求冬至、立春及各节气

$$\text{气积日} = (\text{入蔀年}-1)\times 365\frac{1}{4}$$

$$\text{冬至(立春)大小余} = \left[(\text{入蔀年}-1)\times 5\frac{1}{4}/60\right]_R$$

大余从所入蔀名起,算外。黄帝、夏、殷、周、鲁历为冬至,颛顼历为立春日。

$$\text{次气大小余}=\text{冬至(立春)大小余}+15+\frac{7}{32}$$

累加,得各气,大余满 60 去之,小余满 32 得 1,进位成大余。

四分术推步方法非常简单。蔀首之日气朔相齐,起于夜半。朔气积日、大小余悉皆为 0。递加朔望月 $29+\frac{499}{940}$日得各月朔积日、小余;递加气策 $15+\frac{7}{32}$日,为各气气积日及小余。朔、气策分别累加 940 和 1824 次,得朔气积日 27759,小余又全为 0,为一蔀 76 年气朔积日、小余值。气朔积日各以 60 去之,得一蔀 940 月、1824 气,各月朔、中节大小余历谱。以所入蔀首日名命之,算外,即各朔、气干支、小余。一岁有 24 气,在谱上一一注明。使岁首月名固定是设闰的基本目的。以每岁冬至(颛顼为立春)积日找与其对应的月朔积日,得各年岁首、平闰。对于闰年,将是年各月朔积日一一寻对应的中气,其无中气之朔,即为按无中置闰法当闰之月。

六历中,黄帝、夏、殷、周、鲁五历皆以天正朔旦冬至相齐起于甲子夜半为历元(计算起点),其各年冬至大小余、月龄有下列关系(t 为距元的年数):

$$\text{元首年 } t=0,\text{冬至大小余}=\left[365\frac{1}{4}\times 0/60\right]_R=0$$

$$t=1,\text{冬至大小余}=\left[365\frac{1}{4}\times 1/60\right]_R=5\frac{1}{4}$$

$$t=2,\text{冬至大小余}=\left[365\frac{1}{4}\times 2/60\right]_R=5\frac{1}{4}\times 2$$

$$t=3,\text{冬至大小余}=\left[365\frac{1}{4}\times 3/60\right]_R=5\frac{1}{4}\times 3$$

$$\text{入元}\ t\ \text{年},\text{冬至大小余}=\left[365\frac{1}{4}\times t/60\right]_R$$

冬至与天正朔的时距为月龄，又称闰余。

$$t=0,\text{冬至月龄}=\left[365\frac{1}{4}\times 0/29\frac{499}{940}\right]_R=0$$

$$t=1,\text{冬至月龄}=\left[365\frac{1}{4}\times 1/29\frac{499}{940}\right]_R$$

$$=10\frac{827}{940}\text{日}=\frac{7}{19}\text{月}$$

$$t=2,\text{冬至月龄}=\left[365\frac{1}{4}\times 2/29\frac{499}{940}\right]_R$$

$$=2\times\frac{7}{19}\text{月}$$

$$t=3,\text{冬至月龄}=\left[365\frac{1}{4}\times 3/29\frac{499}{940}\right]_R$$

$$=3\times\frac{7}{19}\text{月}$$

$$\text{入元}\ t\ \text{年},\text{冬至月龄}=\left[365\frac{1}{4}\times t/29\frac{499}{940}\right]_R$$

因为

$$\left[365\frac{1}{4}/60\right]_R\equiv 5\frac{1}{4}$$

$$\left[365\frac{1}{4}/29\frac{499}{940}\right]_R=10\frac{827}{940}$$

所以，四分历步气朔公式可简化为：

$$\text{冬至大小余}=\left[5\frac{1}{4}\cdot t/60\right]_R$$

$$冬至月龄(闰余)=\left[10\frac{827}{940}t/29\frac{499}{940}\right]_R$$

天正朔大小余=冬至大小余-冬至月龄

六历中，颛顼历以人正朔旦立春起于己巳夜半为历元，其步气朔公式为：

$$立春大小余=\left[5\frac{1}{4}t/60\right]_R$$

$$立春平月龄(闰余)=\left[10\frac{827}{940}t/29\frac{499}{940}\right]_R$$

人正朔大小余=立春大小余-立春月龄

颛顼历朔气大余自己巳数起，算外，得人正朔、立春干支；余五历皆以甲子起算，甲子不计，为天正朔、冬至日。不难看出：$5\frac{1}{4}\times80=7\times60$，为7个甲子周期；$10\frac{827}{940}\times19=7\times29\frac{499}{940}$，是7个朔望月长度。

即有

$$\left[5\frac{1}{4}\times80/60\right]_R=0$$

$$\left[10\frac{827}{940}\times19/29\frac{499}{940}\right]_R=0$$

因此，四分法中有如下关系：冬至大小余80年一循环，而冬至月龄以19年(一章)为周期。于是令

$$t_1=[t/80]_R,t_2=[t/19]_R$$

代入前式，得：

$$冬至大小余=\left[5\frac{1}{4}\times t_1/60\right]_R$$

$$冬至月龄=\left[10\frac{827}{940}\times t_2/29\frac{499}{940}\right]_R$$

计算出80年的冬至大小余和19年冬至月龄(闰余)值，做成表(表3-13，表3-14)。四分术中，一元4560年是气朔、日名、岁

名悉数复初的大周期。因此，只要知道，所求之岁的入元年数 t，黄帝、夏、殷、周、鲁五历天正朔、冬至，颛顼历人正朔、立春大小余，以及闰余、闰月，皆可由 t_1、t_2 立即查出。递加朔策、气策得各月各气干支、时刻。

颛顼历可由前式得出立春月龄，即立春距人正朔的日数。立春月龄加气策 $15\frac{7}{32}$日得雨水月龄。每年闰余增加$\frac{7}{19}$月或 $10\frac{827}{940}$日，则相当每月增加$\frac{7}{19}$/12 月（$\frac{7}{228}$月）或 $10\frac{827}{940}/12=\frac{852.25}{940}$日。雨水为冬至后二月、寅月中气。因此，欲返求颛顼历冬至月龄，只需以$\frac{7}{228}$月或$\frac{852.25}{940}$日连续减雨水月龄两次即得。可写作：

表 3—13　四分术冬至大小余表

t_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	$5\frac{1}{4}$	$10\frac{2}{4}$	$15\frac{3}{4}$	21	$26\frac{1}{4}$	$31\frac{2}{4}$	$36\frac{3}{4}$	42	$47\frac{1}{4}$	$52\frac{2}{4}$
10	$57\frac{3}{4}$	3	$8\frac{1}{4}$	$13\frac{2}{4}$	$18\frac{3}{4}$	24	$29\frac{1}{4}$	$34\frac{2}{4}$	$39\frac{3}{4}$	45
20	$50\frac{1}{4}$	$55\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	6	$11\frac{1}{4}$	$16\frac{2}{4}$	$21\frac{3}{4}$	27	$32\frac{1}{4}$	$37\frac{2}{4}$
30	$42\frac{3}{4}$	48	$53\frac{1}{4}$	$58\frac{2}{4}$	$3\frac{3}{4}$	9	$14\frac{1}{4}$	$19\frac{2}{4}$	$24\frac{3}{4}$	30
40	$35\frac{1}{4}$	$40\frac{2}{4}$	$45\frac{3}{4}$	51	$56\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{4}$	$6\frac{3}{4}$	12	$17\frac{1}{4}$	$22\frac{2}{4}$
50	$27\frac{3}{4}$	33	$38\frac{1}{4}$	$43\frac{2}{4}$	$48\frac{3}{4}$	54	$59\frac{1}{4}$	$4\frac{2}{4}$	$9\frac{3}{4}$	15
60	$20\frac{1}{4}$	$25\frac{2}{4}$	$30\frac{3}{4}$	36	$41\frac{1}{4}$	$46\frac{2}{4}$	$51\frac{3}{4}$	57	$2\frac{1}{4}$	$7\frac{2}{4}$
70	$12\frac{3}{4}$	18	$23\frac{1}{4}$	$28\frac{2}{4}$	$33\frac{3}{4}$	39	$44\frac{1}{4}$	$49\frac{2}{4}$	$54\frac{3}{4}$	0

注：颛顼历为立春大小余。

表 3—14　四分术冬至月龄(闰余)值

t_2	闰　余	闰　月	t_2	闰　余	闰　月
0	0		10	$20\frac{193}{940}$　$\frac{13}{19}$	九十(十、十一)
1	$10\frac{827}{940}$　$\frac{7}{19}$		11	$1\frac{521}{940}$　$\frac{1}{9}$	
2	$21\frac{714}{940}$　$\frac{14}{19}$	七八(八九)	12	$12\frac{408}{940}$　$\frac{8}{19}$	
3	$3\frac{102}{940}$　$\frac{2}{19}$		13	$23\frac{295}{940}$　$\frac{15}{19}$	五六(六七)
4	$13\frac{929}{940}$　$\frac{9}{19}$		14	$4\frac{623}{940}$　$\frac{3}{19}$	
5	$24\frac{816}{940}$　$\frac{16}{19}$	三四(五六)	15	$15\frac{510}{940}$　$\frac{10}{19}$	
6	$6\frac{204}{940}$　$\frac{4}{19}$		16	$26\frac{397}{940}$　$\frac{17}{19}$	正二(三四)
7	$17\frac{91}{940}$　$\frac{11}{19}$		17	$7\frac{725}{940}$　$\frac{5}{19}$	
8	$27\frac{918}{940}$　$\frac{18}{19}$	十一十二(正二)	18	$18\frac{612}{940}$　$\frac{12}{19}$	(十一十二)
9	$9\frac{306}{940}$　$\frac{6}{19}$				

注：颛顼历为立春月龄。

$$雨水月龄=立春月龄+气策\ 15\frac{7}{32}日$$

$$冬至月龄=雨水月龄-2\times\frac{852.25}{940}日$$

$$=立春月龄+15\frac{7}{32}-2\times\frac{852.25}{940}日$$

$$=\left[10\frac{827}{940}\times t_2/29\frac{499}{940}\right]_R+15\frac{7}{32}-1\frac{764.5}{940}日$$

六历中，凡冬至月龄大于$\frac{12}{19}$月或$18\frac{612}{940}$日之年有闰。一般置闰于是年年终。如设闰年中，则以$\frac{7}{228}$月($\frac{852.25}{940}$日)累加冬至月龄，至满$\frac{228}{228}$月(或$29\frac{499}{940}$日)时，即于该月设闰。颛顼历闰月皆置

本年九月后，称后九月。

夏历用人正，以建寅之月为岁首。故闰余$\frac{11}{19}$月（或 17 $\frac{91}{940}$日）已上之年有闰。岁前冬至月龄为$\frac{11}{19}$月之年，闰斯年年终十二月，称闰再十二月。

《开元占经》所传六历上元积年，皆与纬书开辟之元相近。去605 元，得各历近距之元为：

黄帝历　前 1350 年辛卯

颛顼历　前 1506 年乙卯

夏　历　前 1076 年乙丑

殷　历　前 1567 年甲寅

周　历　前 1624 年丁巳

鲁　历　前 1821 年庚子

由六历近距之元至所求年 t，依上法，求出 t_1、t_2，查表 3－13、表 3－14，得各年朔气。

由 $t=[t/80]_R$，$t=[t/19]_R$，即 $t\equiv t_1(\mathrm{mod}80)$，$t\equiv t_2(\mathrm{mod}19)$。已知 t_1、t_2，解一次同余式，可以返求 t(取最小值)，从而可判断其时所用六历是哪一种。这有两种情况：

(1)已知冬至干支（大余）和日序。由此查四分术 80 年冬至干支表（表 3－13）可得出 t_1，冬至日序即月龄的加余进位整数，根据表 3－14，四分历一章冬至月龄表寻求 t_2。解上列一次同余式，求出 t。但冬至干支大余在表 3－13 的 80 数值中会有 20 个重复。因此有时 t_1 需进一步探求。四分法冬至于支悉可表示为$\frac{3}{4}n$，其中 n 为 0 至 80 的整数，n、t_1 可表示为

$$n=\mathrm{Int}\left[冬至大余/\frac{3}{4}\right]$$

$$t_1=[23n/80]_R，即\ t_1\equiv 23n(\mathrm{mod}80)$$

冬至干支相距 23 年，小余增加$\frac{3}{4}$。由此关系可求出 t_1。式中，Int 表示求方括号算式的整数。

(2)年中闰月及朔日干支已知。根据前面介绍的由闰余计算年中闰月的方法，反过来，可由年中闰月推闰余。因此以闰月查表 3－14，可选求 t_2 及冬至月龄值。由于

天正朔大小余＝冬至大小余－冬至月龄

显然，闰月朔可由下式求出

$$闰月朔大小余=\left[天正朔+m\times 29\frac{499}{940}/60\right]_R$$

$$=\left[冬至大小余-冬至月龄+m\times 29\frac{499}{940}/60\right]_R$$

m 为闰月距天正的月数。此式中冬至月龄由 t_2 得出，m 及闰月朔大余皆为已知，故冬至大小余可求。由此依表 3－13 得 t_1。t_1、t_2 已知，则 t 可解出。

由所求年距近距元为入元年，可很简单推出入蔀数、入蔀年。根据四分术一部历谱，也可很方便地得出任一年的朔气干支、时刻。六历各蔀首日名及春秋、战国、秦汉初时期，各历入蔀年列于表 3－15。

《史记·历书·历术甲子篇》记载了四分术一蔀 76 年每年的月数、天正月(含冬至之月)合朔、冬至大小余数值，及每章章首冬至合朔加时太阳所在的方位：正北、正西、正南、正东。依表 3－15 六历入蔀年查出所求年入何蔀、入何年，由《历术甲子篇》即得是年平闰、天正朔、冬至大小余数值。递加朔策 $29+\frac{499}{940}$日、气策 $15+\frac{7}{32}$日得各月、各气。平年 12 月、闰年 13 月，闰月置年终。

表 3—15　古六历八蔀年

历 蔀名	五历入蔀年(公元前)								颛顼历入蔀年
	鲁历			殷历	周历	黄帝历	夏历	蔀名	公元前
	闰余 0	《开元占经》	闰余 1						
甲子	321	301	481					己巳	
癸卯	245	225						戊申	
壬午	169	149						丁亥	
辛酉								丙寅	
庚子								乙巳	
己卯							696	甲申	
戊午							620	癸亥	
丁酉							544	壬寅	
丙子							468	辛巳	
乙卯							392	庚申	
甲午							316	己亥	
癸酉				731	788	514	240	戊寅	670
壬子				655	712	438	164	丁巳	594
辛卯				579	636	362		丙申	518
庚午	777	757		503	560	286		乙亥	442
己酉	701	681		427	484	210		甲寅	366
戊子	625	605	785	351	408	134		癸巳	290
丁卯	549	529	709	275	332			壬申	214
丙午	473	453	633	199	256			辛亥	138
乙酉	397	377	557	123	180			庚寅	

因此，利用表 3－15 和《历术甲子篇》是推步六历最便捷的方法。《甲子篇》未列出每年岁首闰余之值，说明先秦、汉初古历很可能皆置闰年终。欲设年中闰，可将《甲子篇》每年月数 12、13 之前加上“闰余”二字及其数值。闰余值以 19 年为周期，章首，即标注四正方位（正北、正西、正南、正东）之年其值为 0，章 19 年，每年闰余数值如表 3－16。

表 3－16　一章 19 年闰余数表

入章年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
闰余值	0	7	14	2	9	16	4	11	18	6	13	1	8	15	3	10	17	5	12

由《甲子篇》可知，闰余大于 12 之年为闰年 13 月。年中当闰之月，由岁始闰余值乘 12，累加 7，加满 228 之月，即为所求闰月。上列闰余值，以 1/19 月为单位。由闰余推求年中闰月的详细步法，前面已述，此处从略。

三、六历算例

下面以云梦秦简《为吏之道》附“魏户律”、“魏奔命律”所记“廿五年闰再十二月丙午朔”为例，介绍六历推步的具体过程。历史学家、考古学家证认此为魏安釐王二十五年（前 252）历日。我们首先考查此朔所用何历。

黄帝、夏、殷、周四历中，只夏历用寅正，余皆行周正（建子）。且只有历元为冬至的夏历闰十二月为章内第 8 年（入章第 9 年），余皆为第 18 年（参见表 3－14 或表 3－12），故先以此试论之。

依夏历（历元冬至），由闰十二月得 $t_2=8$，闰余（冬至月龄）必为$\frac{18}{19}$月或 27 $\frac{918}{940}$日，闰月平朔丙午，大余 42（丙午的干支序数），小余不知，由关系

$$闰月朔大小余=(冬至大小余-冬至月龄)+m\times 29\frac{499}{940}$$

代入上述各值，闰十二月为冬至后二月，故 $m=2$，有

$$冬至大小余-27\frac{918}{940}+2\times 29\frac{499}{940}=42\frac{小余}{940}$$

整理移项，得

$$冬至大小余=42\frac{小余}{940}+27\frac{918}{940}-2\times 29\frac{499}{940}$$

$$=42\frac{小余}{940}-31\frac{80}{940}=10\frac{860}{640}\sim 11\frac{859}{940}$$

四分历冬至干支为 $\frac{3}{4}n$，故在上式范围内只可能为 $11\frac{1}{4}$ $(n=15)$。冬至大小余已知$(11\frac{1}{4})$，则

$$闰月朔大小余=\left(11\frac{235}{940}-27\frac{918}{940}\right)+2\times 29\frac{499}{940}$$

$$=11\frac{235}{940}+31\frac{80}{940}=42\frac{315}{940}$$

以冬至干支 $11\frac{1}{4}$ 查表 3—13，得 $t_1=25$

解

$$[t/80]_R=25,[t/19]_R=8$$

得

$$t=825$$

闰十二月为冬至后二月，其朔在公元前 251 年。

前 251+前 825=前 1076 年，正合夏历近距之元。知此历日为魏用夏历所得。

接着，我们以六历分别推算魏安釐王二十五年的历谱，进一步论证斯时魏国所行并非殷周等五历，确为夏历。

(一)求入蔀年

入元年＝近距上元－魏安釐王二十五年

夏　历　前 1076—前 252＝824 年

周　历　前 1624—前 252＝1372 年

颛顼历　前 1506—前 252＝1254 年

殷　历　前 1567—前 252＝1315 年

黄　帝　前 1350—前 252＝1098 年

鲁　历[①] 前 1841—前 252＝1589 年

除鲁历外,距元皆不足纪法,故五历入天纪,鲁历入地纪 70 年。

$$\frac{\text{入纪年}}{76}=\text{入蔀数}\frac{\text{入蔀年}}{76}=n\,\frac{m}{76}$$

为入 $n+1$ 蔀第 $m+1$ 年。

夏　历　$\frac{824}{76}=10\,\frac{64}{76}$　入甲午蔀 65 年 4 章 8 年

周　历　$\frac{1372}{76}=18\,\frac{4}{76}$　入丙午蔀 5 年 1 章 5 年

颛顼历　$\frac{1254}{76}=16\,\frac{38}{76}$　入癸巳蔀 39 年 3 章 1 年

殷　历　$\frac{1315}{76}=17\,\frac{23}{76}$　入丁卯蔀 24 年 2 章 5 年

黄帝历　$\frac{1098}{76}=14\,\frac{34}{76}$　入庚午蔀 35 年 2 章 16 年

鲁　历　$\frac{69}{76}=0\,\frac{69}{76}$　入甲子蔀 70 年 4 章 13 年

(二)求六历天正合朔、冬至大小余、闰余

以六历入蔀年,查《历术甲子篇》得各历天正合朔、冬至大小

---

① 鲁历推步参见下节。

余、闰余数值如表 3—17 所示。

表 3—17　魏安釐王二十五年六历天正朔、冬至大小余及闰余值

	天正朔			冬至			冬至月龄		闰月
	大余	干支	小余	大余	干支	小余	$\frac{1}{19}$月	日	
夏　历	18	壬子	849	36	庚午	0	11	$17\frac{91}{940}$	闰十二月
周　历	7	癸丑	11	21	丁卯	0	9	$13\frac{929}{940}$	不闰
颛顼历	20	癸丑	412	33	丙寅	27	8.625	$13\frac{381.1}{940}$	不闰
殷　历	46	癸丑	716	0	丁卯	24	9	$13\frac{929}{940}$	不闰
黄帝历	42	壬子	900	58	戊辰	16	10	$15\frac{510}{940}$	不闰
鲁　历	49	癸丑	767	2	丙寅	8	8	$12\frac{408}{940}$	不闰

颛顼历冬至月龄是由立春月龄加气策，再以 $2\times\frac{7}{228}$月减之得出，方法见前。六历中，除夏历外，余五历皆闰次年。夏历行寅正。岁前冬至月龄为 $17\frac{91}{940}$日（$\frac{11}{19}$月），是岁十一月合朔在冬至前$\frac{18}{19}$月（$27\frac{918}{940}$日）。化为$\frac{216}{228}$月，加 $2\times\frac{7}{228}$得$\frac{230}{228}$，超过 1 月之数，故冬至后第二月为闰月，即闰十二月。以为无正月中气雨水之月。确证魏用夏历无疑。

（三）各月朔干支小余

天正合朔、冬至大小余，递加朔策、气策，得各月各气。六历推步魏安釐王二十五年各月合朔干支、小余，年中无中气当闰之月列于表 3—18。

表 3—18　魏安釐王二十五年六历各月朔干支、小余值年中无中气月

秦年	秦昭襄王五十五年												五十六年							
魏年				魏安釐王二十五年													二十六年			
合朔儒历	公元前253 11.11	公元前253 12.11	公元前252 1.9	公元前252 2.8	公元前252 3.9	公元前252 4.8	公元前252 5.7	公元前252 6.6	公元前252 7.5	公元前252 8.4	公元前252 9.2	公元前252 10.2	公元前252 11.1	公元前252 11.30	公元前252 12.30	公元前251 1.28	公元前251 2.27	公元前251 3.28	公元前251 4.26	公元前251 5.26
干支	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	甲戌	甲辰
夏历		十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	闰再十二	正月	二月	三月	四月
		壬子	壬午	辛亥	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	甲戌	甲辰
		849	408	907	466	25	524	83	582	141	640	199	698	冬至	756	无中气	814	373	872	431
周历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	闰五月	六月
		癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	乙亥	甲辰
		11	510	69	568	127	626	185	684	243	742	301	800	359	858	417	916	475	无中气	533

续表

秦年			秦昭襄王五十五年											五十六年						
魏年			魏安釐王二十五年													二十六年				
合朔儒历	公元前253 11.11	公元前253 12.11	公元前252 1.9	公元前252 2.8	公元前252 3.9	公元前252 4.8	公元前252 5.7	公元前252 6.6	公元前252 7.5	公元前252 8.4	公元前252 9.2	公元前252 10.2	公元前252 11.1	公元前252 11.30	公元前252 12.30	公元前251 1.28	公元前251 2.27	公元前251 3.28	公元前251 4.26	公元前251 5.26
干支	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	甲戌	甲辰
颛顼历	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月
	癸未	癸丑	壬午	壬子	壬午	辛亥	辛巳	庚戌	庚辰	己酉	己卯	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	乙亥	甲辰
	853	412	911	470	29	528	87	586	145	644	203	702	261	760	319	818	377	876	无中气	934
殷历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	闰五月	六月
		癸丑	癸未	壬子	壬午	辛亥	辛巳	庚戌	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳
		716	275	774	333	832	391	890	449	8	507	66	565	124	623	182	681	240	无中气	298

续表

秦年	秦昭襄王五十五年									
魏年				魏安釐王二十五年						
合朔儒历	公元前 253 11.11	公元前 253 12.11	公元前 252 1.9	公元前 252 2.8	公元前 252 3.9	公元前 252 4.8	公元前 252 5.7	公元前 252 6.6	公元前 252 7.5	公元前 252 8.4
干支	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉
黄帝历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月
		壬子	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉
		900	459	18	517	76	575	134	633	192
鲁历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月
		癸丑	癸未	壬子	壬午	辛亥	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌
		767	326	825	384	883	442	1	500	59

秦年	秦昭襄王五十五年（续）		五十六年							
魏年	魏安釐王二十五年（续）						二十六年			
合朔儒历	公元前 252 9.2	公元前 252 10.2	公元前 252 11.1	公元前 252 11.30	公元前 252 12.30	公元前 251 1.28	公元前 251 2.27	公元前 251 3.28	公元前 251 4.26	公元前 251 5.26
干支	戊寅	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	甲戌	甲辰
黄帝历	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	闰三月	四月	五月	六月
	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	甲戌	甲辰
	691	250	749	308	807	366	无中气	424	923	482
鲁历	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	闰六
	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳
	558	117	616	175	674	233	732	291	790	无中气

第八节　鲁历以闰余一之岁为蔀首

六历中，黄帝、颛顼、殷、周四历材料较多，用《开元占经》给出的上元积年推算，结果大致相符。汉魏时期所传夏历已有正月甲子朔旦雨水、十一月甲子朔旦冬至两种历元气朔。经考查上元甲子应为乙丑，《开元占经》给出的值为是。史志所记，鲁历材料较少，且有一些矛盾。本节对此试做讨论。

《汉书・律历志》说，“周道既衰，幽王既丧，天子不能班朔，鲁历不正，以闰余1之岁为蔀首。”古历四分法19年有7闰月，平均每年有闰月7/19个，称为闰余7。它实际上是冬至与天正朔之间的时距，又叫冬至月龄。当闰余达到19之年，即得19/19＝1，则该年设一闰月。可见它是历法推算中安排闰月的一种参数。闰余无表示至朔同日同时。闰余1是月朔在冬至前1/19月。鲁历以闰余1之岁为蔀首，就是说，鲁历部首，从而历元之岁天正合朔在冬至之前1/19个月，即$1\frac{521}{940}$日。

《续汉书・律历志》称鲁历上元干支是庚子，《开元占经》给出鲁历上元庚子至开元二年甲寅(714)岁积2761334年。其606元天纪甲子蔀首距开元二年为2534年，即公元前1821年庚子。可见，《开元占经》所传鲁历上元甲子与积年数是一致的。前301年为地纪甲子蔀首。

依《开元占经》鲁历上元积年及“以闰余一之岁为蔀首”的条件推算，得出鲁僖公五年入己酉蔀27年，天正丙午朔，小余798；日南至乙丑，小余16(以32为分母)。但《大衍历议》谓鲁历僖公五年辛亥为十二月晦，壬子为正月朔；南至先周历3/4日，朔后51/940日。两者显然不合。用《开元占经》鲁历上元积年数据，采用以“闰余无”之岁为蔀首(历元气朔相齐)计算，得出，鲁僖公五

年入己酉蔀27年，天正戊申朔，小余379；日南至乙丑，小余16。也与《大衍历议》有别。是《开元占经》、《续汉书·律历志》给出的上元甲子、积年有误呢，还是三统历说的"鲁历不正，以闰余1之岁为蔀首"不对呢？鲁历到底是什么样子？两千年来，不少学者做过研究，似都未能做出圆满的解答。为讨论这个问题，现先来分析一下《大衍历议》给出的周历、鲁历数据。

对《左传》"僖公五年正月辛亥朔日南至"这条记载，一行《大衍历议》是这样说的："以周历推之，入壬子蔀第四章，以辛亥一分（四分日之一）合朔冬至。殷历则壬子蔀首也。鲁历南至，又先周历四分日之三，而朔后九百四十分之五十一。故僖公五年辛亥为十二月晦，壬子为正月朔。又推日食出于殷历，其以闰余一为章首，亦取合于当时也。"就是说，鲁历是以"闰余一"之岁为章蔀首的。用鲁历推僖公四年得十二月庚戌冬至，小余2分。若鲁历僖五年正月朔仅比周历后51/940，则不能得到正月壬子朔。因周历僖五年入壬子蔀58年，为4章章首。正月辛亥朔，小余235。后51分仍为辛亥朔，仅小余增至286分而已，相当于辛亥日30刻合朔，距壬子日首还有近70刻。显然，《新唐书·历志》这段话有脱误。校改成，"鲁历南至，又先周历四分日之三，而朔后此值（四分日之三）又九百四十分之五十一"，如此，鲁历正月壬子朔，小余51分，就合理了。

如果这样理解和校改是正确的话，据此可以复原鲁历。从《汉书·律历志》所传"鲁历以闰余一之岁为蔀首"出发，排出四分术一蔀的历谱。在这种历谱中，入丁卯蔀第55年的历日，其岁前冬至及天正朔的干支、小余都正好与大衍历议中关于鲁历僖五年历日的记述相合。斯历以"闰余一"之岁为蔀首。因此，它应该就是《大衍历议》所说的鲁历。僖五年（前655）入丁卯蔀55年，则前709年为丁卯蔀首，前785年为戊子蔀首。其后，前633年为丙子

蔀首，前 557 年为乙酉蔀首，前 481 年庚申为地纪甲子蔀首。鲁历第 606 元天纪甲子蔀首乃前 2001 年庚子。鲁历的上元庚子年为前 2760801 年，距开元二年 2761514 年。

由此可知，《开元占经》所述鲁历积年有误，少 180 年。但上元甲子是庚子，《开元占经》及《续汉书 · 律历志》的记载是对的。且确系以“闰余一”之岁为蔀首。这样，《汉书 · 律历志》所传的鲁历就得以复原了。

如此复原的“鲁历”，是否符合史志记述呢？

3 世纪杜预根据汉末宋仲子所集七历以考春秋日食合历。我们依据上述复原的鲁历及占经所传其余五历的积年推步，月名和朔日干支全合春秋经记录者：周历得 1 食，黄帝历得 1 食，颛顼历得 8 食，夏历得 14 食，真夏历（历元冬至）得 1 食，殷历得 13 食，鲁历得 13 食。这个结果与杜预所考完全一致。考查时，六历置闰全依“无中置闰”的方法。我们的结果也与姜岌、祖冲之所考相同。请参看《中国先秦史历表》附表 4，此处从略。

此外，一行《大衍历议 · 日度议》中列出一些周、殷、颛顼历的章蔀首年名、日名、朔气大小余数值。经考验，它们悉与用开元占经上元积年推步所得相合。它们是：

僖五年“正月辛亥朔日南至”，周历入壬子蔀第 4 章，以辛亥 1 分合朔冬至。殷历为壬子蔀首。

昭二十年“二月己丑朔日南至”，周历得己丑 2 分，殷历得庚寅 1 分。

宣五年丁卯岁，颛顼历第 13 丁巳蔀首。

宣十一年癸亥，周历以庚戌日中冬至。

哀十一年丁巳，周历入己酉蔀首。

惠王四十三年己丑，周历入丁卯蔀首。

始皇三十三年丁亥，得颛顼历壬申蔀首。

吕后八年辛酉,周历入乙酉蔀首。

太初元年,周历甲子蔀首甲子夜半合朔冬至,等等。

因此可知,《开元占经》所传五历上元甲子和积年都是可信的;根据《汉书·律历志》、《大衍历议》复原的鲁历也是准确无疑的。

清代学者李锐、汪曰桢、顾观光,近人朱文鑫、高平子对古六历都有深入研究。顾观光用演纪术推得鲁历上元至开元二年为2764394年,比《开元占经》增加3060年。其607元天纪甲子蔀首为前321年庚子。我们推得鲁历上元庚子为公元前2760801年,距开元二年2761514年,比《开元占经》积年多180年;鲁历第606元天纪甲子蔀首为前2001年庚子,前481年庚申(孔子获麟之年)为地纪甲子蔀首。这两种复原方法都以庚子为上元,推算的朔闰也基本一致。但前者以闰余0之岁作蔀首,与《汉书·律历志》、《新唐书·历志》记述不符。我们是根据"鲁历不正,以闰余一之岁为蔀首"复原的,与汉唐所传鲁历相合。

第九节 元光历谱与汉初历法

西汉中叶施行太初历以后,我国历法开始有了完整系统的记述。先秦时期专门谈历法的著作一种也没有流传下来。只有一些零散的材料。因此,先秦、秦汉之际的历法问题,至今仍多有争论而未能彻底解决。

20世纪70年代,先后出土了几种反映秦、汉初历法的新材料,如,山东临沂银雀山二号汉墓竹简《汉武帝元光元年历谱》、马王堆三号汉墓文帝十二年木牍、江陵凤凰山九号汉墓文帝十六年木牍和云梦睡虎地秦简《南郡守腾文书》、《大事记》,等等。其中《元光元年历谱》是汉初历书的实物,它基本完整地记载了一年的

朔气干支和历注，尤为珍贵。根据文献和这些新材料，有可能对秦汉初历法的研究向前推进一步。

《史记·历书》对秦汉初历法是这样说的：

> 因秦灭六国，兵戎极烦，又升至尊之日浅，未暇遑也。而亦颇推五胜，而自以为获水德之瑞，更名河曰德水，而正以十月，色上黑。
>
> 始皇推终始五德之传，改年始，朝贺皆自十月朔。

司马迁指出了秦统一六国后，历法有"更"、"改"及汉初"袭秦正朔服色"事。

《汉书·律历志》云，自殷周，历法皆创业改制。汉兴，方纲纪大基，庶事草创，袭秦正朔。以北平侯张苍言，用颛顼历，比于六历，疏阔中最为微近。《汉书》成书于东汉初年。东汉以后，于是有了汉初袭秦、用颛项历的说法，如，东汉后期，蔡邕也说，汉兴承秦，历用颛项。而《史记》以及成书于初汉的《淮南子》都没有提汉初施行何种历法，也无颛项历之名。后汉以后，各代历志多沿袭汉志颛项历的说法。颛项历是古六历之一。文献所书汉初历日依颛项历术推步常有不合，而多与殷历相近。所以宋人刘羲叟认为"汉初用殷历，或云用颛项历"。在他所作长历中"今两存之"。清末汪曰桢"以史文考之"，汉初历法"似殷历为合"。在他写的《长术辑要》中仍并列殷历、颛项历的推步结果。20世纪出版的历表都以这两部长历为依据。但汉初行用何种历法的问题，并未解决。

马王堆三号汉墓木牍记载汉文帝十二年二月朔日为乙巳，凤凰山九号汉墓木牍标注文帝十六年后九月朔日戊申，而临沂出土的《武帝元光元年历谱》给出了是年十三个月朔日以及冬至、立春、夏至、立秋4个节气的干支。这样，新出汉初简牍共记下了15个朔日

干支。我们将它们与用颛顼历、殷历推步所得朔日做了比较，结果列于表 3－19。如表所示，15 个朔日中，颛顼历推步仅得 6 个，占 40％；而与殷历计算相合的却有 11 个，为 73％。由此可以看出，汉初历法既不是颛顼历，也不是殷历。这是新出汉初简牍历日解决的第一个问题。但它确实与殷历比较接近，这就是刘羲叟、汪曰桢、陈垣等学者认为“汉初用殷历”，“似殷历为合”的道理。

表 3－19　新出简牍历朔与颛顼历殷历比较

		简牍朔日	颛顼朔日	殷历朔日
文帝十二年	二　月	乙巳	甲辰	甲辰
文帝十六年	后九月	戊申	丁未	戊申
武帝元光元年	十　月	己丑	己丑	己丑
	十一月	己未	戊午	己未
	十二月	戊子	戊子	戊子
	正　月	戊午	戊午	戊午
	二　月	戊子	丁亥	丁亥
	三　月	丁巳	丁巳	丁巳
	四　月	丁亥	丙戌	丙戌
	五　月	丙辰	丙辰	丙辰
	六　月	丙戌	乙酉	乙酉
	七　月	乙卯	乙卯	乙卯
	八　月	乙酉	甲申	乙酉
	九　月	甲寅	甲寅	甲寅
	后九月	甲申	癸未	甲申

不是殷历，也不是颛顼历，根据计算，新出汉初简牍历日与其他六历也不相合。那么，汉初到底行用的是什么样的历法呢？下面根据《元光元年历谱》对汉初历法试作复原。

由《元光元年历谱》所记 4 个节气、13 朔日分析得出，汉初实行的历法，在元光元年这一年各月的朔、气干支和大小余一定要满足表 3－20 所示的状况。这是一个很窄的范围。在表中我们

也列出用颛顼历推算元光元年朔日和立春、立秋、夏至、冬至4气的干支和小余数值。《元光元年历谱》是汉初历书的实物。由表看出，汉初历法与颛顼历推步所得合朔时刻相差近半日($10^h59^m \sim 12^h26^m$)，即朔小余相差430～487分(以940为分母)。因此根据元光元年历谱复原汉初历法可有58种可能性，上下限相差可达87分钟。就是说，仅据出土的一组《元光元年历谱》13朔日，还不可能把汉初实行历法准确、唯一地复原出来。

《元光元年历谱》记载了4个节气：十一月二十八日丙戌冬至，正月十五日壬申立春，六月初三戊子夏至，七月二十日甲戌立秋。其中特别值得注意的是壬申立春和戊子夏至。由战国六历到《史记·历术甲子篇》，可知，战国至汉初历法为四分术。另一方面，清时宪历以前中国历法一直用平气注历。四分术气策$15\frac{7}{32}$日。立春距夏至9个节气长$136\frac{31}{32}$日。而正月十五壬申距六月初三戊子136日。就是说，只有壬申立春节气的小余为0的情况下(立春时刻在壬申夜半)，夏至才会在六月初三戊子(小余为31)。此外任何情况，即立春在壬申日其他任何时刻，夏至都在六月初四己丑。因此，由《元光元年历谱》可确定汉初历法这一年各节气准确唯一的小余值。尽管汉初历法步朔小余值有58种可能性，但节气小余值却可肯定只有一种安排，即汉初实行历法元光元年节气大小余必为：冬至丙戌，小余11；立春壬申，小余0；夏至戊子，小余31；立秋甲戌，小余20。而在黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁古六历中，只有用颛顼历推步元光元年节气大小余，会得到上述结果，其他五历皆与此不合。前面说过，汉初历法合朔时刻(小余)与颛顼历相差近半日，但节气时刻与颛顼历相合。因此，有的论著中仍称汉初历法为颛顼历。

表 3—20　元光元年气朔干支及小余范围

元光元年	《元光元年历谱》			元光元年历法朔气干支小余范围			颛顼历推算		复原方法 2		复原方法 1		复原方法 3	
	朔日	节气					朔	气	朔	气	朔	气	朔	气
	干支	日期	干支	朔	小余	节气小余	干支小余	干支小余	干支小余	干支小余	干支小余	干支小余	干支小余	干支小余
十　月	己丑			己丑	824～881		己丑 394		己丑 835		己丑 864		己丑 881	
十一月	己未	二十八冬至	丙戌	己未	383～440	冬至丙戌 11	戊午 893	冬至丙戌 11	己未 394	冬至丙戌 16	己未 423	冬至丙戌 11	己未 440	冬至丙戌 11
十二月	戊子			戊子	882～939		戊子 452		戊子 893		戊子 922		戊子 939	
正　月	戊午	十五立春	壬申	戊午	441～498	立春壬申 0	戊午 11	立　春壬申 0	戊午 452	立春壬申 5	戊午 481	立春壬申 0	戊午 498	立春壬申 0
二　月	戊子			戊子	0～57		丁亥 510		戊子 11		戊子 40		戊子 57	
三　月	丁巳			丁巳	499～556		丁已 69		丁巳 510		丁巳 539		丁巳 556	

续表

元光元年	《元光元年历谱》			元光元年历法朔气干支小余范围			颛顼历推算		复原方法 2		复原方法 1		复原方法 3	
	朔日	节气					朔	气	朔	气	朔	气	朔	气
	干支	日期	干支	朔	小余	节气小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余
四月	丁亥			丁亥	58～115		丙戌 568		丁亥 69		丁亥 98		丁亥 115	
五月	丙辰			丙辰	557～614		丙辰 127		丙辰 568		丙辰 597		丙辰 614	
六月	丙戌	三日 夏至	戊子	丙戌	116～173	夏至 戊子 31	乙酉 626	夏至 戊子 31	丙戌 127	夏至 己丑 4	丙戌 156	夏至 戊子 31	丙戌 173	夏至 戊子 31
七月	乙卯	二十 立秋	甲戌	乙卯	615～672	立秋 甲戌 20	乙卯 185	立秋 甲戌 20	乙卯 626	立秋 甲戌 25	乙卯 655	立秋 甲戌 20	乙卯 672	立秋 甲戌 20
八月	乙酉			乙酉	174～231		甲申 684		乙酉 185		乙酉 214		乙酉 231	
九月	甲寅			甲寅	673～730		甲寅 243		甲寅 684		甲寅 713		甲寅 730	
后九月	甲申			甲申	232～289		癸未 742		甲申 243		甲申 272		甲申 289	

根据《元光元年历谱》复原汉初历法共有58种可能性，在没有其他新材料的情况下，无法进一步判断这58种可能中谁对谁错、谁密谁疏。每人都可有自己的复原方法。至今已发表的论著中复原历法共有三种。其一，为过半进位法，又称借半日法。即以颛顼历推步汉初历法的气朔大小余，朔小余大于470的月份，进位为大余。就是把颛顼历朔小余值加大470分，作为汉初历法的朔小余值，而节气小余不变。其二，以颛顼历推步月朔，而将朔小余值增加441分，作为汉初历法朔小余，故又称“加大朔小余441分”法，但此法不用颛顼历计算节气。由于四分术以分母为940的分数表示日的奇零部分。第一种方法采用过半进位法或四舍五入法，将小余加大470分，复原的汉初历法比颛顼历合朔时刻大12^h。第二种方法加大颛顼历月朔小余441分为汉初历法。复原的汉历比颛顼历合朔时刻迟11^h16^m。方法二是出于四分术中，朔小余大于441分之月，其月为大月30日的考虑。因四分法朔望月长$29\frac{499}{940}$日，合朔时刻(小余)大于46.915刻(小余441)之月，441加499等于940，小余满蔀月(940)进位为日，故该月有30日。我们采用寻找汉初历法蔀首的方法算是第三种。目的是找到一个合朔交节同日同时又起于夜半(小余为0)的汉初历法的计算起点。

因为四分历每蔀76年940月，这940月的小余值从0到939是互不相同的。每个月朔的小余总比其前一月的小余大499。一岁有二十四气，每两气之间小余增加7，经过32个节气，小余值循环一次。前已指出，汉初历法的节气小余值由《元光历谱》可以唯一地确定下来，这可使复原计算简化。据此，可很容易找出，从元光元年正月往前数第82个月的月朔，从立春向前数第160个节气，气朔的积日干支是相同的，而小余都为0，即合朔交节同日同时起于夜半。这一天，汉景帝后元三年(前141)五月芒种合朔，就

是我们所要找的汉初历法的蔀首。所复原的汉初历法，是以五月朔旦芒种夜半相齐作为蔀首的四分术。根据四分法的计算方法，可再往上推，得到公元前672年五月甲子朔旦芒种夜半作为汉初历法的元首。如此，元光元年距元538年，入丁酉蔀第7年。历元符合朔气相齐起于甲子夜半的条件。

依四分法推步，丁酉蔀第7年的历谱、朔气大小余，与银雀山二号墓《元光元年历谱》完全相合。结果也列于表3—20中，表中同时列出第一、第二种复原方法所推算的结果。第二种方法节气未按颛顼历计算，所得干支、大小余与《元光历谱》不合，因而并非汉初施行的历法。

根据汉初文献记载的32次日月食及历史上、出土文献中可靠的后九月记载，我们研究了汉初闰年的安排。得出：汉初历法是以固定冬至在十一月作为设闰的标准，但在文帝后元前后，做过变动。把以冬至总在十一月改成以雨水不出正月当作置闰的依据。

第十节　秦与汉初历法不同

一、秦与汉初历法是不一样的

前面依据对《元光元年历谱》的分析，得出了汉初历法。虽然它有一定的变动出入范围，不是唯一确切的结果，但它不是颛顼历、殷历，也不是古六历的任何一种，却是可以肯定的。历史上说，汉初袭秦正朔服色，那么秦所行用的是不是与汉初相同的历法呢？

过去文献中，没有地方谈到战国后期各国实际行用历法的情况。有关的史日干支记载也很少。尤其朔日，仅有“维秦八年岁在涒滩秋甲子朔”一条。因此，战国时期及灭六国后秦用什么历法无法做深入的研究。1975年年底，湖北云梦睡虎地出土的秦简《南郡守腾文书》和《大事记》中，有自秦昭王元年直到始皇三十年

的一些历日、后九月记载。尤其《南郡守腾文书》还给出了文件发布日期为秦王政“廿年四月丙戌朔丁亥”。在《大事记》中又记下了同一年“七月甲寅”的日子。后面我们将指出，这个“七月甲寅”实际上就是秦王政二十年七月的朔日。同一年中秦简提供了两个朔日干支，对研讨秦汉历法很是重要。下面据此试探秦汉初所行的是不是同一种历法。

我们据《元光历谱》复原了汉初历法。这种历法是不是太初改历前一直行用的历法呢？为此，先用马王堆三号墓和凤凰山九号墓木牍的历日来检验一下。这两个木牍分别给出了文帝十二年(前 168)二月朔乙巳和文帝十六年(前 164)后九月朔日戊申两个朔日干支。它们与元光元年二月朔、后九月朔正好分别相距 34 年和 30 年。由表 3－20 看出，汉初施行历法元光元年二月朔日干支为戊子，小余必在 0～57 之间；后九月朔日干支是甲申，小余定为 232～289。从元光元年二月、后九月的大小余出发，用四分法推步得出的文帝十二年二月、十六年后九月的朔日干支分别为乙巳和戊申。这正好与出土的这两块木牍所记朔日相合。由此可知，至少汉文帝至武帝元光间行用同一历法。

秦王政二十年(前 227)七月朔距汉武帝元光元年(前 134)七月朔正好 93 年。根据四分法，93 年为 1 蔀又 17 年。这其中应有 34 个闰月($4\times7+6=34$)，所以 93 年共计有 1150 个朔望月。四分法每月 $29\frac{499}{940}$天，1150 月共计 $33960\frac{450}{940}$。如果秦王政二十年到元光元年间用同一种历法，那么从元光元年七月朔日(乙卯日，小余 615～672，儒略日为 1672682)减去 $33960\frac{450}{940}$日，减余就应该是秦王政二十年七月朔日的干支(大余)和小余。相减的结果是

$$1672682\frac{615}{940}-33960\frac{450}{940}=1638722\frac{165}{940}=\text{乙卯}\frac{165}{940}$$

$$1672682\frac{672}{940}-33960\frac{450}{940}=1638722\frac{222}{940}=乙卯\frac{222}{940}$$

秦王政二十年七月朔日干支为乙卯（儒略日 1638722），小余为 165～222。就是说，根据汉初行用的历法来推算，秦王政二十年七月没有甲寅这一天。甲寅应为六月晦。但在出土的云梦秦简《大事记》中，七月有甲寅。这就完全说明了秦王政二十年时所用历法与汉元光元年是不相同的。

前已指出，汉初历法不是殷历、颛顼历，这里又论证了秦王政二十年所行历法与汉初不同。仅就近年新出土的《元光元年历谱》、马王堆和凤凰山汉墓木牍、云梦秦简而言，就不可能找出一种历法，同时满足它们所给出的历日。秦王政二十年离汉文帝、武帝虽仅几十年，但由此可知在这期间历法有过变革。《史记》明言，秦统一后，历法有过"更"、"改"，而汉初袭秦正朔服色。战国时期各国行用各自不同的历法。如云梦简《为吏之道》末尾附抄的两条魏律，其颁布时间注明是"廿五年闰再十二月丙午朔辛亥日"。考查得出，是时魏行夏历，就与秦历不同。秦灭六国统一中国后，当然要采取措施统一历法。这有两种可能，一是废止各国历法，一律行用秦历；二是统一后进行历法改革调整，施行新历。我们比较倾向第二种可能。历法自殷周皆创业改制，统一中国是件大事，理应改行新历，这是一；其次，《史记》记载，始皇改年始，朝贺皆自十月朔。而由秦简《大事记》知，至迟在昭王时，秦历早以十月为年始了。那么始皇统一后历法到底"改"的是什么呢？显然只能是改正朔了。云梦秦简秦王政二十年七月甲寅的记载又为秦统一后进行过历法变革提供了证据。根据计算，始皇三十年（前 217），这一年五月戊午正好芒种合朔相近。很有可能斯时依据观测推算得到了这个气朔相合，就以这较难得的气朔相合作为制订新历的依据。这一天也就成为新历的计算起点——蔀首。自始皇三十一年始行此历。汉兴承秦，一直行用这种历法，直到

太初改历。这就是我们依《元光历谱》复原汉初历法的构思。当然前面说过，汉初历法仅就《元光历谱》来说，就有58种可能。不易做出哪一种是唯一正确的结论。因此，我们的复原也仅是58种可能中的一种而已。此外，作者复原的汉初历法以朔旦芒种夜半齐同作为蔀首，也仅备此一说，尚待验证。因此，退一步讲，即使我们复原的汉初历法较疏，并非汉初施行的唯一正确历法。但，秦与汉初历法是不一样的这个结论应该是对的，除非有一天发现新材料证实云梦简历日有错。

二、秦用颛顼历问题

历史上记有秦用颛顼历，汉初承秦。但从出土简牍及文献记载的历日考查得出汉初行用的历法却不是颛顼历，这是怎么回事呢？我们认为，战国后期和兼并六国前后，秦所施行的可能是颛顼历。

（一）云梦秦简历日特征合颛顼历

云梦秦简历日以十月为岁首（如《大事记》所书昭王“四十五年十二月甲午”，乃岁前十二月，下一个十二月中无甲午日），闰月置年终称后九月的做法符合颛顼历的特征。而考查简中闰月安排和历日干支，都与颛顼历推算结果相合。

（二）三个秦历朔日皆与颛顼历一致

经计算验证，目前已知三个秦历朔日，皆可由颛顼历推算得出。

（1）《吕氏春秋·序意》所记“维秦八年，岁在涒滩，秋甲子朔”。秦王政八年（前239）入颛顼历癸巳蔀52年，推得秋七月为甲子朔，小余143。

（2）云梦简《南郡守腾文书》注明发布日期是秦王政“二十年四月丙戌朔丁亥”。是年（前227）入颛顼历癸巳蔀64年，四月丙

戌朔，小余118。简合颛顼。

(3)云梦简《大事记》所书秦王政“二十年七月甲寅”。是年颛顼历入癸巳蔀64年七月得甲寅朔，小余675。知甲寅为颛顼历七月朔日。

由上可知，战国后期，灭六国前后秦行用颛顼历。而汉初历法与颛顼历有别，朔差半日，说明这期间历有变更。战国后期及统一前后秦所用历法与汉初不同。汉初历法比颛顼历合朔差近半日，后天较多，日食多发生在晦、晦前一日。所以《史记》、《汉书》上说，这时历法的“历度闰余，未能睹其真也”。

第十一节　秦至汉初历法研究的新进展

银雀山汉墓《元光元年历谱》的发现，使秦汉初历法研究向前跨了一步。前面说过，尽管学者们据《元光元年历谱》复原的汉初施行历法稍有差异，但它与殷历、颛顼历不同却是取得共识的。汉初历法朔小余比颛顼历大430～487，时刻相差近半日($10^h.98$～$12^h.43$)，气小余与颛顼历相合。汉初历法朔小余比殷历大126～183，合朔时刻在其后$3^h.22$～$4^h.67$，交气时刻却较殷历要早29/32日($21^h.75$)。就是说汉初历法合朔时刻比殷历迟4^h左右，比颛顼历晚约半日。从合朔来说，更近殷历；交气时刻与颛顼历同，而比殷历早近1日。据《元光元年历谱》复原的汉初历法有58种可能性，上下可差$1^h.46$($87^m.3$)。至于这58种可能中究竟何者正确，这只有待新材料的发现才能判断。

1983年年底到1984年年初，江陵张家山西汉初年古墓出土了大量竹简。这是近年考古的一次重大发现。竹简内容除法律文书、奏谳书等文献外，还有日书、算书和历谱。从目前已经发表的部分材料来看，其中记载的某些历朔和历谱资料可能对研究秦汉初历法很有用处。

在已公布的材料中，有一支记载汉惠帝三年(前 192)朔日的历简。这支简比《元光元年历谱》早 58 年。内容简单，仅列有惠帝三年十二个月的朔日干支。但它在历法上的作用不能小觑。它一方面证实了《元光元年历谱》及由它复原汉初历法的方法、内容是可信的；另一方面，它与《元光元年历谱》配合，使人们对汉初历法的了解深入一步。

惠帝三年入颛顼历壬申蔀 23 年、殷历丙午蔀 8 年。与《元光元年历谱》相似，《惠帝三年历谱》朔日与用殷历、颛顼历推步得出的结果都有差异。12 个朔日中与颛顼历相合者仅得 5 个，占 42%；而有 9 个合殷历，为 75%。表 3—21 列出用殷历、颛顼历推步所得惠帝三年各月朔日干支及小余数值。依据历简朔日和四分术推步法数，表中同时也给出汉初历法惠帝三年合朔时间必定满足的小余范围。

表 3—21　惠帝三年历简小余范围

惠帝三年	殷　历	颛顼历	惠帝历简
历　简　朔日	朔日　小余	朔日　小余	小余范围
十　月　丙申	丙申 115	乙未 751	267～324
十一月　乙丑	乙丑 614	乙丑 310	766～823
十二月　乙未	乙未 173	甲午 809	325～382
正　月　甲子	甲子 672	甲子 368	824～881
二　月　甲午	甲午 231	癸巳 867	383～440
三　月　癸亥	癸亥 730	癸亥 426	882～739
四　月　癸巳	癸巳 289	壬辰 925	441～498
五　月　癸亥	壬戌 788	壬戌 484	0～57
六　月　壬辰	壬辰 347	壬辰 43	499～556
七　月　壬戌	辛酉 846	辛酉 542	58～115
八　月　辛卯	辛卯 405	辛卯 101	557～614
九　月　辛酉	庚申 904	庚申 600	116～173

由《惠帝三年历谱》看出，汉初历法合朔比殷历小余大152～209，较颛顼历小余大456～513。即合朔时刻分别比殷历、颛顼历迟$3^h.88$～$5^h.45$和$11^h.64$～$13^h.10$。而由元光历谱已知，汉初历法合朔小余比颛顼历大430～487，较殷历大126～183。汉初施行的历法只有一种，它一定既在由元光元年历谱得出的58种可能之内，又要符合《惠帝三年历谱》。由此可得出，汉初历法一定满足这样的条件：它的合朔小余较颛顼历大456～487，或比殷历大152～183。这就是说，根据《元光元年历谱》知道，汉初施行的历法有58种可能性。而由张家山《惠帝三年历谱》的出土，又缩小了考查的范围，得出汉初历法仅有32种可能性。使汉初历法的研究又有了新的发展。

根据《惠帝三年历谱》，现在可以肯定地说，前面所述已发表的三种汉初历法的复原方案中，“加大朔小余441分”法是不对的，可以排除。其余两种皆在32种可能之中，是非暂时还无法认定。

但是，张家山汉简也给秦汉初朔法研究提出了新问题。

在已发表的《奏谳书》案例中，记载了五条秦汉初历日资料。其中汉高祖八年四月甲辰朔、十年七月辛卯朔、十一年八月甲申朔皆合以上复原的汉初历法；秦王政二年十月朔癸酉合颛顼历，都没有问题。值得推敲的是，“六年八月丙子朔”。根据简文中，①最里属于咸阳，咸阳高祖元年已更名；②“里典”即里正，避秦王政讳；③“恒游旗下”句中，不避汉文帝讳，这三条理由，学者都将它考订为秦王政六年八月。可是根据颛顼历推步，秦王政六年（前241）入颛顼历癸巳蔀50年，八月为乙亥朔，小余387。而不是丙子朔，差1日。是年入殷历丁卯蔀35年，八月也是乙亥朔，小余691。推步结果见表3－22。

表 3—22　秦历朔日合历考查

竹简文献历朔		颛顼历推	殷历推步
秦王政二年	十月癸酉朔	癸酉　86	癸酉　340
秦王政六年	八月丙子朔	乙亥　387	乙亥　691
维秦八年	秋甲子朔	甲子　143	甲子　447
秦王政廿年	四月丙戌朔	丙戌　118	丙戌　422
	七月甲寅	甲寅　675	乙卯　39

秦王政六年六月颛顼历是丙子朔，小余 329。但案例前文中有六月癸卯。而八年六月或八月皆非丙子朔。看来似乎也不易用简文误字来解释。《大衍历议》说，颛顼历上元甲寅岁正月甲寅晨初合朔立春，七曜皆直艮维之首……其后吕不韦得之，以为秦法，更考中星，断取近距，以乙卯岁正月己巳合朔立春为上元。根据一行的这个说法，秦用颛顼历是吕不韦用事以后所为。由表 3—22看出，维秦八年和秦王政二十年的历朔俱合颛顼历。因此，有无可能颛顼历为秦王政八年所改行。这样，就又出现两个新问题：

(1)维秦八年以前秦用何历。六年八月以颛顼历、殷历推算俱得乙亥朔。用鲁历推得乙亥，小余 742 分。而用黄帝历、夏历、周历推皆为甲戌朔，小余分别为 875、824 和 926。说明秦王政八年以前所行历法不是六历中的任何一种。此处俱以夏正八月而言。黄帝、殷、周、鲁诸历皆行周正，如以周正八月来看，殷、鲁两历六年八月为丙子朔，小余分别为 633 和 684。但这样一来，秦王政二年十月又皆非癸酉朔，显然也是不对的。

(2)如秦八年才改行颛顼，汉初历法合朔与颛顼差约半日。说明历史上颛顼历仅在秦王政时行用过不长时期。因为前面讲过，惠帝三年与《元光元年历谱》不合颛顼历、殷历；而云梦简所书

秦二十年七月甲寅与由元光元年、惠帝三年历谱复原的汉初历法又均不相容。

考古发掘报告称,张家山西汉初年古墓时代不迟于汉文前元时期。如果简文不误,自秦王政至汉文帝,从历日上看,“六年八月丙子朔”,只有文帝六年尚属可能。由惠帝三年、元光元年历谱复原汉初历法可有 32 种可能。其中有 26 种排出的汉初历法,文帝六年八月为丙子朔。就是说,如《奏谳书》所书六年八月丙子朔确为文帝时期的案例,那么,加上这条历朔,可得出:汉初历法合朔小余一定比颛顼历大 456～481 分,较殷历大 152～177 分。这样,汉初实行历法的考查范围又进一步缩小了。当然,以上分析是基于简文无误,时代正确,所记确为文帝六年案例这几个前提下进行的。是否如此,以及怎样解释文帝案例不避文帝而避秦王政讳三条理由,等等,希望历史学家对这些问题能做出解答。

前面介绍战国历法时,说明了六历的上元甲子和积年等都是东汉以后追正的。战国历法与汉传六历是否完全一样,有没有参差?《奏谳书》六年八月丙子朔时代的考订也给六历研究提出了这样一个新的问题。

第四章　太初历和三统历

太初历是西汉武帝时代一次重大历法改革的成果。

三统历是我国第一部有完整术文传世的历法。它由西汉末年王莽的国师刘歆所作。

通常认为三统历是刘歆根据汉武帝时邓平、落下闳的太初历改编而成的。之所以这样说是因为三统历的基本历法数据和太初历相同。两者都以太初元年前十一月甲子朔旦冬至为历元;两者都以 81 为日法,因而有相同的朔望月和回归年长度(因为两者都以19 年7 闰为置闰周期,即 235 个朔望月的时间长度等于 19 个回归年)。上述观点原则上是对的,但尚需做进一步讨论。

既然三统历与太初历有密切关系,那么我们在研究三统历之前,应当先研究一下太初历。

第一节　太初历

记述太初历原始史料的只有《史记·历书》、《汉书·律历志上》及《汉书·天文志》三项[①]。但是《汉书·天文志》只给出了各年岁星晨出东方时所在的二十八宿名称。《史记·历书》记有:"太初改历"的简单起因,并在文末附上一份称为《历术甲子篇》的历表。从这份历表的内容来看,它使用的是一种四分历,即以

① 这里只是指有关历法本身的原始史料,而不是指关于改历的原始史料。后者的史料载体要多一些。

$365\frac{1}{4}$日为一年，其朔望月则为$29\frac{499}{940}$日。这与三统历的数据及与《汉书·律历志上》所谈到的太初历数据都不一样。至于《史记》所载改历经过，也和《汉书》所记大有差别。由于这个原因，往往使人怀疑，太初历当是一种四分历，而班固则是出于误会，把刘歆的三统历当成了太初历。因此，我们应当先讨论太初改历到底改的是什么历。

一、关于太初改历的史料

（一）《史记·历书》

《史记·历书》只在全文末段记有：

> 至今上即位，招致方士唐都，分其天部；而巴落下闳运算转历，然后日辰之度与夏正同。乃改元，更官号，封泰山。因诏御史曰："乃者，有司言星度之未定也，……今日顺夏至，……自是以后，气复正，……以至子日当冬至，则阴阳离合之道行焉。十一月甲子朔旦冬至已詹。其更以七年为太初元年[①]。年名焉逢摄提格，月名毕聚，日得甲子，夜半朔旦冬至。"

据《尔雅·释天》，所谓焉逢摄提格，是指这一年的太岁所在的干支名为甲寅；所谓毕是指月名为甲；所谓聚（有的书中又作陬）是指这月为正月[②]。也就是说，汉武帝的改历诏书把元封七年改元为太初元年，并把冬至所在之月改名为正月。这意味着，汉

① 颁改历诏之前，汉代一直用颛顼历。这种历法以冬至所在之月为十一月，年首之月为十月。

② 毕、聚之释也见《尔雅·释天》。

武帝的改历诏采用了周正的历日制度。而这一点却与前面所说的“日辰之度与夏正同”相矛盾。

(二)褚补《史记·孝武本纪》

其中说到改历问题:“(元封七年)夏,汉改历,以正月为岁首,……因为太初元年。”这意味着,是在元封七年几乎过了一半之后才改的历。

(三)《史记·太史公自序》

其中说到,司马迁当太史令后,“五年而当太初元年,十一月甲子朔旦冬至,天历始改,建于明堂,诸神受纪”。照此说来,在元封七年十一月甲子朔旦冬至的那一天,就在明堂颁布了新历。这与上引《本纪》中所说“夏,汉改历”之说明显矛盾。不过这个矛盾好解决,我们到下面再叙述。

(四)《汉书·武帝本纪》

在元封六年(前105)之后接着记道:“太初元年冬十月,……夏五月,正历,以正月为岁首。”这表明,改历是在太初元年五月。由此得知:

第一,太初元年这一年非常特殊,从冬十月开始,到第二个十二月结束,共有15个月之多。

第二,改历的时间是在原颛顼历的五月,此条与《史记·孝武本纪》相合而更明确。

第三,新历的岁首是原颛顼历的正月。这与《史记》所载汉武帝改历诏书中所说的以十一月为正月的说法矛盾。但却与《史记·历书》中所说的“日辰之度与夏正同”相合。

(五)《汉书·律历志上》

这是关于太初改历过程讲得最详细的文献。先说在元封七年时有大中大夫公孙卿、壶遂和太史令司马迁等人进言:“历纪坏废,宜改正朔。”经过一番讨论,武帝向御史颁了改历诏。诏书文字与《史记·历书》所载大体相同而略有简略。但文字只引到“其以七年为(太初)元年”就戛然而止。

接着讲到,诏卿、遂、迁及侍郎尊、大典星射姓等造汉历。这些人“乃定东西,立晷仪,下漏刻,以追二十八宿相距于四方”,下了一番观测和推算的工夫之后,定出元封七年是阏(即焉)逢摄提格之岁;这年的“中冬十一月甲子朔旦冬至,日月在建星,太岁在子”。

这说法又有两个矛盾。其一,既称“摄提格之岁”,那就是太岁在寅了,可是却又称“太岁在子”。其二,从后世的干支纪年逆推上去,太初元年是丁丑年,而一般的历史纪年表都把元封六年记为丙子年。这与元封七年“太岁在子”之说矛盾。

有意思的是,《汉书·律历志上》接着说了一件令人不解,且无前人解决的事:“已得太初本星度、新正,姓等奏:‘不能为算。愿募治历者,更造密度,各自增减,以造汉太初历。”既然已得到了“太初本星度、新正”,则何以有些改历人员会提出“不能为算”的自贬声誉的奏章,要求皇上另请高明?尤其领头上奏的大典星射姓当是位天文工作者,其他人当也非无能之辈。在汉代的历法尚属简单的情况下,提出另请高明的请求实在是不可思议的。唯一合理的解释是,这个改历的群体遇到无法克服的困难;且他们之间发生了意见分歧。因为这群人中官阶最高的是大中大夫公孙卿、壶遂,而主管天文历法工作的最高负责人是太史令司马迁,可是这份另请高明的报告却又不是他们所打的。从下文我们还可

看到，再请的高明者中已没有了卿、遂、迁等人的名字。

又请了些什么人呢？《汉书·律历志上》中记有："乃选治历邓平及长乐司马可、酒泉侯宜君、侍郎尊，及与民间治历者凡二十余人，方士唐都、巴郡落下闳与焉。都分天部，而闳运算转历。"这些人中，落下闳的方法是"以律起历"，"与邓平所治同。于是，皆观新星度、日月行，更以算推，如闳、平法。"

这一回，大家意见一致了。于是乎，汉武帝"乃诏迁：用邓平所造八十一分律历，罢废尤疏远者十七家。"其后又请人校核过，仍认为"太初历晦朔弦望皆最密。日月如合璧，五星如连珠。"于是，更坚定了使用邓平历的决心。邓平也升官为太史丞。

《汉书·律历志上》中并未详述太初历的具体内容，只谈到了几个数据的来由。

第一，落下闳提出："律容一龠，积八十一寸，则一日之分也。"这里明确提出的是太初历日法八十一的数字是来源于黄钟律管的容积。黄钟律管长九寸，内管底面积为九平方分。体积为八百一十立方分。落下闳视之为八十一寸。而他的历法中的日法定为八十一。落下闳由此把他的历法数据与音律挂上了钩。

第二，邓平、落下闳都认为，他们定的朔望月长度为："一月之日二十九日八十一分日之四十三。"再根据当时大家公认为 19 年 7 闰的规律，可以推得一回归年长度为 $365\frac{385}{1539}$ 日。其他节气等也都可由此而推出来。

第三，非常奇怪的是邓平提出了藉半日法的问题："先藉半日，名曰阳历；不藉，名曰阴历。所谓阳历者，先朔月生；阴历者，

朔而后月乃生。"邓平认为,"阳历朔,皆先旦月生[①],以朝,诸侯、王、群臣便"。太初改历之前用没用过藉半日法,天文学史家有不同意见。但邓平改太初历是用的此法,这是为什么?在朔前后的一、二日里,月亮实际上是看不见的。所以,邓平说的用了阳历就"先旦月生,以朝,诸侯、王、群臣便",实在是说说而已[②],毫无意义。看来是别有缘故。

二、太初改历真相

(一)明显可以推定的事实

在上引五种改历史料中,有很多矛盾。不过也有许多是明显可以推定的事实。

1. 太初改历的原因

太初改历有两个原因。其一是自然的,即《汉书·律历志上》中所载,公孙卿、壶遂、司马迁等所说"历纪坏废",指出"汉兴,方纲纪大基,庶事草创,袭秦正朔。以北平侯张苍言,用颛顼历,比于六历,疏阔中最为微近。然正朔服色未覩其真。而朔晦月见,弦望满亏多非是。"也即,颛顼历用到汉武帝时,误差已很显著,不得不改。其二是考虑到汉王朝的权威问题。汉初,袭秦正朔,那是因为顾不上。到汉武帝中期,武力强盛,国力大张,海内统一,汉武帝自觉王基巩固,于是有时间来搞些封禅之类的更加显示其

---

① 陈久金、陈美东在《从元光历谱及马王堆帛书〈五星占〉的出土再探颛顼历问题》一文中首次对"藉半日法"的问题做了解释。在历法推算中,如果推出下一个合朔时刻的日以下余数部分大于二分之一日,应在上个月。到历面上本朔日时,月已离太阳而东。此所谓"先朔月生"。此时,月在太阳之东,故太阳先出地平,即"先旦月生"。见《中国天文学史文集》,科学出版社,1978年,第95～117页。

② 所谓"先旦月生",表明这是个旦前见于东方的残月。而新月则应当是在黄昏时分见于西方的,根本谈不上对诸侯、王、群臣上朝时有什么便利不便利的问题。

君权神授的活动。因此，当臣下上奏说："帝王必改正朔，易服色，所以明受命于天也"，当然高兴得很。

2. 汉武帝为改历下的七次诏书

第一次是接到公孙卿等人"宜改正朔"的上言之后下诏御史大夫儿宽，让他与博士们共议此事。第二次是接到儿宽等人都赞同改历后下诏给御史，决定改历。此即《史记·历书》中所载。第三次是诏公孙卿等人，让他们具体处理改历的事务。第四次是接到大典星射姓等人奏报"不能为算"之后，另选多人编算新历。第五次是下诏给司马迁，让他用邓平所造八十一分律历。第六次诏，使人校验律历。等到校者太监淳于陵渠回奏邓平历法最密后，最后诏定用邓平历法，且给邓平加官。从以上7次诏书可见，整个改历过程是在汉武帝密切关怀下进行的。

3. 邓平的历法大体与落下闳的一致

这是在《汉书·律历志上》中多次强调的：落下闳法"与邓平所治同"；"如闳、平法"等。只不过，邓平使用藉半日法，落下闳是否也用，则不明。

4. 元封七年定过焉逢摄提格的岁名

此事也见于《汉书·律历志上》，故《史记·历书》诏书中的岁名并非衍文。

(二)一些矛盾的消除

1. 关于改历时间的矛盾

《史记·太史公自序》认为，在太初元年"十一月甲子朔旦冬至，天历始改"。而褚补《史记·孝武本纪》、《汉书·武帝本纪》均称是在"元封七年"的夏天或"太初元年的五月"。

如果我们知道武帝下过几次改历诏书，而且有射姓等奏不能为算的事，那么显然可以肯定，两者之说都是有道理的。即，《太

史公自序》记的是第一次改历的事，这一次颁布了新的历元；而《孝武本纪》和《武帝本纪》记的是第二次另组班子后进行的改历。这次改历采用了邓平的历法。

2. 新历的正月究竟是什么月份

《史记·历书》既称改历后"日辰之度与夏正同"，而改历诏书却说元封七年"十一月甲子朔旦冬至已詹"的月份为"甲正月"，即，为周正。如果明白太初改历改了两次，则可以肯定，第一次改历，用的是周正。第二次改历才改用夏正。

3. 元封七年是太岁在子、在丑，还是在寅

太岁在寅是不可能的。因为是寅的话，就在甲寅，这与后世的纪年完全连接不上，中间隔断了38年左右。或者说，甲寅之年是第一次改历诏书中所颁布的。而子年则是为第一次改历所进行的测算中所定的(《汉书·律历志上》所记大体不差)。至于丙子和丁丑的矛盾大致可这样解释：元封六年是从原颛顼历的十月到九月。元封七年则是从第二年的十月到九月。而太初元年则为从原颛顼历的第二年十月到第三年的十二月。如果维持1年12个月的习惯，则可以把元封七年定为原颛顼历的第二年十月到第二年十二月，而太初元年则定为原颛顼历的第二年正月到第三年十二月(12个月)。而就太初历的观点来看，则元封七年可依从元封六年的太岁所在干支名——丙子。

(三)"不能为算"之谜的破解

现在还剩下两个矛盾未曾解决。一个是大典星射姓等人在"已得太初本星度、新正"之后突然提出"不能为算"。一个是邓平为什么平白无故要提出"藉半日法"。两者其实是相关的。

究竟在改历中发现了什么困难，以致连大典星那样的专业行家们都"不能为算"了呢？细查全部有关遗存史料，可知其他都无

关大局，只有一件事令当时的行家们极为挠头。那就是：这些专家们通过郑重的天文观测，测得元封七年，“中冬十一月甲子朔旦冬至，日月在建星，太岁在子”。太岁在子，岁名应是困敦。太岁虽是个假想的天体，但它的位置却也不是随意安排的，而是与真正的天体——岁星的位置有关的。因此，太岁在子也是一种天文实际的反映。这个实际又是与以往的太岁纪年相关联的。然而，大典星射姓等天文专家们测得的这个太岁位置，却与汉武帝第二次改历诏书，即向御史大夫下令改历的诏书中所记的太岁纪年名称大相径庭。那次诏书中汉武帝显然是根据公孙卿、壶遂、司马迁等人的意见，把元封七年年名定为焉逢摄提格，即甲寅。而如果按相关联的年名计算[①]，这一年应当是丙子年，即，游兆困敦年。甲寅年是丙子年之后的第 38 年，或是，在丙子年之前的第 22 年。总之，两者之间有很大的间隔。因此，如果要执行诏书中所颁定的年名，将会在天文学上造成困难（寅年的岁星位置和元封七年冬至岁星所在的实际位置相差太远），也会在历史学上造成困难（年名间断太长）。此所以令当时的专家们束手无策：反对皇帝的诏书，那是绝无此胆；顺应皇帝的诏书，那又违反实际，的确算不下去。被迫无奈之下，才会有“不能为算”的报告，请皇帝另请高明来解这个难题。

在这种情况下，敢来应征接手这件事的，必然有其特殊的办法。而最有效的办法其实就是把自己的历法弄得更神秘，更显得有天意，由此可以釜底抽薪，把原来诏书中的历元年名困难搁置起来，而公开地使用符合实际的历元名称。在皇帝看到新历法更显出自己“受命于天”之时，龙颜大悦之下，他原来诏书里面的历

---

① 这里再三强调的是太岁纪年年名的相关联性，而不是相连续性。因为岁星的恒星周期不是 12 年整，而是 11.86 年，故每过 85～86 年，岁星会超过预推位置 1 次。由此产生太岁纪年中的超辰现象。

元年名究竟是否真正得到了遵用，就不会多加追究。说到底，汉武帝并非历法专家，要“瞒天过海”，是不难的。其实，如果他真是历法行家，那么在他的诏书中也不会颁布这样的历元年名了①。

那么，新班子中的人是用什么办法渡过此难关的呢？其一，就是落下闳、邓平的办法，把历法与音律挂起钩来。早在先秦时代就已经有人提出把天文和音律相联系的思想了。《国语·周语》中周景王与伶州鸠的一段对话记录中，伶州鸠阐发的就是这个思想。这段对话发生在周景王二十三年（前522）。景王问伶州鸠，“七律者何？”伶州鸠回答了一通武王伐纣时的天象。他认为，当时的岁星和月亮之间相去七宿（他称为七列）；岁星和太阳、辰星等的位置相去七辰（他称为七同）。接着指出：“凡神人以数合之，以声昭之。数合声和，然后可同也。故以七同其数，而以律和其声，于是乎有七律。”这里指出了神和人“以数合之，以声昭之”，而这数又来自天文学。

伶州鸠之说在现代人看来固然觉得可笑，但在古代却是被很郑重地对待的。其后又发现了音律中有十二律，它与一年的月数又正好对应。因此，通过音乐可以使神、人相通的思想，在中国天文学史上曾流传了一千多年。落下闳、邓平正是利用这种思想，把自己的历法予以神化，这在时时盼望与神相会的汉武帝来说，自然有其独特的吸引力。

① 《史记索隐》在给这个历元年名作注时引了东晋天文学家虞喜的话：“天元之始，于十一月甲子夜半朔旦冬至，日月如连珠，俱起牵牛之初，岁，雄在焉逢，雌在摄提格。月，雄在毕，雌在訾，訾则娵訾之宿。日，雄在甲，雌则在子。此则甲寅之元，天道之首。”由这段话中可体会出，武帝诏书中所颁历元为甲寅元，是“天道之首”。这是该历元的政治意义之所在：谁颁行这个历元就表明谁掌握了天道，说明他受命于天。但对甲寅元的这种说法，用到别的元上又有何不可？例如，在东汉时代人们对甲寅元的看法就不这样神秘（见《续汉书·律历志中》）。因此，从政治上说汉武帝也未必非甲寅元不可。

至于对年名矛盾，落下闳、邓平等人采用了含糊敷衍的办法。《汉书・律历志上》在记录大典星射姓等人的历元观测时说道："乃以前历上元太初四千六百一十七岁，至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁，……日月在建星，太岁在子。"这里的"四千六百一十七岁"这个数字乃是落下闳、邓平八十一分律历的结果[①]，在邓平、落下闳之前是无人知道的，大典星射姓更不会知道。而居然在这里出现，本应令人奇怪。故王先谦《汉书补注》在注这一句时引王引之的话说，"今案四千六百一十七岁，本作四千五百六十岁。此后人以三统历改之也。"

说这是《三统历》的数据，那是对的；但说是后人所改则没什么根据。一则中国古人极为尊重历史记载。一般个人妄改是几乎不可能的。私意改动的本子居然得以流传开来，那更是不可思议[②]。再则，妄改总有其目的。而照字面来说，经过四千六百一十七岁之后，岁名是不会重复的。即使加进当时可能已掌握的太岁超辰规律在内也罢。因此，这样的改动丝毫没有意义。除非我们对这一上元做完全不同于四分历的理解，否则我们无法摆脱困境。

所以，我们认为，这一段文字其实本是邓平等人的历法中的内容[③]，是以此来迷惑汉武帝的。班固不知其故，将其录入邓平等人出现之前的史实中，因而更使矛盾显得扑朔迷离。

---

① 参阅后文"三统历"。

② 传抄中的讹误确有流传下来的。但讹误与妄改不同。讹误都有其规律，或形似，或声似，诸如此类，都可找出其致讹的原因。妄改则不然。虽也都有原因，但皆出于妄改者的某种误解，而与文字的形、音等没多大关系。而四千六百一十七岁和四千五百六十岁相去甚远，也不可能是传抄讹误。

③ 司马迁本人是反对八十一分律历的，他的《史记・历书》中根本不提邓平的名字，他的《历术甲子篇》是地道的四分历。公孙卿等人后来在改历中销声匿迹，其学术观点当与他大致相同。故他们不可能提出四千六百一十七岁这样与八十一分法相关的数据来。

(四)"藉半日法"之谜

我们前面已经提到邓平声言使用"藉半日法"的理由。而这种理由只能是说说而已。真正有实践意义的"先旦月生",当是历面在朔旦,而天文实际是在晦或晦之前的一天。这就是所谓的历法先天(预报的天象比实际的天象发生得早)。仔细推敲一下,《汉书·律历志上》在记述藉半日法时称:"先藉半日,名曰阳历;不藉,名曰阴历。所谓阳历者,先朔月生[①];阴历者,朔而后月乃生。"这段话中所说的阳历,和邓平所说的"阳历朔皆先旦月生"概念中的"阳历"是不同的。《汉书·律历志上》所称"先朔月生",乃是一种实际新月发生在前,历面朔发生在后的现象,古代称之为历法后天(历法预报的天象发生在实际天象发生之后)。

按照邓平的要求,他安排的是一个先天的历法,即,他定的阳历朔是在上个月末结束之前的一天:晦或晦前1日。也就是说,他安排的历谱,第二个月不是大月30日,而是只有29日。所谓"藉半日法",当是指将历元的时刻扣去半天,而不是如过去所理解的将历元时刻加上半天。过去所理解的"藉半日法"将会使历法后天,它的第一个月将是30天的大月。

搞清楚了邓平所需要的"藉半日法"的概念,我们才可以反过头来问,他为什么要这样做?因为无论怎么藉半日法,总是一种人为的特殊措施。采取这种特殊措施,一定有它的特殊理由。

这个特殊的理由,我们认为,实在是与太初历所定的历元有问题。邓平发现了这一点,于是不得不使用藉半日法来做一个补救。或者也可说,这是大典星射姓等人发现的第二个使他们不能为算的难题。邓平说藉半日法的理由,乃是为了摆脱又一重困境。

---

① 先朔,月生。此时月见于日之东方。月出东方地平线上时,太阳已经在东方地平上升高。这种天象对于上早朝的大臣们来说,根本无所谓便利。

我们知道，公孙卿、壶遂、司马迁等人提出改历，既有其历法本身误差增大的自然原因，也有为汉武帝宣扬君权神授需要服务的社会原因。而之所以在元封七年前后提出，还有一个很凑巧的自然原因，那就是：根据汉颛顼历的推算，这一年的十一月甲子日夜半时刻正好是冬至和合朔相会。而这样的相会需 1520 年才有一次[①]。故当时的天文学家们必然会为遇到这样千载难逢的时刻而兴奋不已，以这样的时刻来作为新历的历元，当然是吉祥无比的了。

然而，他们在这样做时却没有想到，既然旧历会有“朔晦月见，弦望满亏多非是”的毛病，则据此推出的元封七年十一月甲子夜半朔旦冬至的这个时刻又岂能做得准，从而以之为历元！然而，显然他们是在大喜之下冲昏了头脑，把这个历元上报给了汉武帝。汉武帝因此才能在改历诏书中予以宣布。等到大典星射姓等人真正做了一番观测之后，自然不难发现这个御颁的历元至少在合朔时刻方面是不准的。面对这种窘境，他们除了提出“不能为算”之外，又能怎么样呢？

以上虽然是我们的推测，但这推测是合理的，而且也可以找到证据。

根据现代天文学的推算，元封七年，十一月中的冬至发生在公元前 105 年 12 月 23 日下午 8 时；合朔发生在公元前 105 年 12 月 24 日 9 时 8 分。而甲子日则是在该年的 12 月 25 日。以上数

---

① 颛顼历是一种四分历。即 1 年$=365\frac{1}{4}$日。19 年有 7 个闰月，共 235 个朔望月。1 朔望月$=19\times365\frac{1}{4}\div235=29\frac{499}{940}$日。19 年$=19\times365\frac{1}{4}$日$=6939\frac{3}{4}$日。故从历元开始，经 19 年之后冬至、合朔相会于同一时刻，但不在夜半。必须经 4×19 年$=76$ 年，才会至朔相会于同一日的夜半。

4×19 年$=27759$ 日，故从历元开始过 76 年之后至、朔还不会相会于与历元日同名的日子里的夜半。必须经过 20×76 年$=1520$ 年$=555180$ 日，才会相会于与历元日名相同的日子的夜半。

据均采自《三千五百年历日天象》一书①。该书所给时刻均为北京时间,即中国标准时间。它比西安的地方时早了约30分钟。也就是说,在西安观测到的准确的冬至时刻应在公元前105年12月23日下午7时30分。合朔则发生在公元前105年12月24日8时38分。由于冬至前后太阳的去极度变化微小,因此,在古代的冬至时刻观测中发生1～2天的错误是常有的事,但合朔则不同。古代对朔望月的观测很早就达到了相当准确的程度。公孙卿等人在提出"历纪废坏"时的理由正是"朔晦月见,满亏弦望多非是"。因此我们可以肯定,汉武帝颁布的历元就合朔的误差而言是可以觉察的,大约有15时22分之多的误差,可以被定为有半天(12时)的误差。如果历元有半天误差,则新的历法仍然脱逃不了"朔晦月见,弦望满亏多非是"的命运。

因此,邓平必须改此历元。为了不与诏书冲突,邓平不能明改历元,而只能以藉半日法为幌子,以"朝,诸侯、王、群臣便"为理由,而予以暗改。

第二节 三统历

《三统历》原文也已无传。只因《汉书·律历志》里已用一卷多的篇幅,详细介绍了该历,故后世之人对《三统历》原文,已并不如何珍视而予以不断传抄和翻刻。查《隋书·经籍志三·历数家》中有:"梁又有《三统历法》三卷,刘歆撰,亡。"据此知,刘歆《三统历》原书有三卷之多,而此本在隋代已亡。但在《旧唐书·经籍志》和《新唐书·艺文志》中都还载有一卷本的刘歆《三统历》,只是在《宋史·艺文志》方始无见。故知在隋、唐时代尚有一卷本(或详细摘

① 张培瑜:《三千五百年历日天象》,河南教育出版社,1990年出版。

要本?)的刘歆《三统历》存在，其失传乃在宋、元时代。

今世得知三统历详情，端赖班固传述之功。《汉书·律历志上》说得明白：

> 至孝成世，刘向总六历，列是非，作《五纪论》。向子歆，究其微眇，作《三统历》及《谱》，以说《春秋》，推法密要，故述焉。

班固所述的《三统历》大约可分三部分：序言，历法术文，《世经》。序言在《汉书·律历志上》之末。历法术文和《世经》则构成《汉书·律历志下》的全卷。今约略分析一、三两部分，而置重点于《三统历》术文的本身。

一、《三统历》序言

这篇序言于历法本身的进步，其实无关宏旨，只是它体现了一种用象数《易》来指导历法的思想。如果要讨论中国古代历法思想史，则本文乃是一篇难得的资料，故在此仍有对本文略加考查的必要。

(一)从音律向象数《易》之转变

三统历的数据和计算方法都脱胎于太初历，而太初历是倚仗音律为其神秘主义基础的。那么，刘歆为什么又要将这个基础往象数《易》方面转移呢？这里主要有两个原因。

一个是西汉中期以后象数《易》的兴起。这种源自于《易·系辞传》的数字神秘主义思想，给人提供了一种简捷的研究世界的方法。每种事物现象均可定出一个数，经过数的运算可以求出各种未知的事物现象。这种思想特别在经过西汉思想家董仲舒对

古代的阴阳说和五行说加以改造和糅合，成为阴阳五行说之后，在解释事物现象时就变得更为容易。因此，自西汉中期孟喜、京房两位大象数《易》家的工作之后，象数《易》兴旺起来，几有统治当时思想论坛之势。风气所及，刘歆自然会受到深刻的影响。

另一个原因是，当时人们对音律的认识主要还只是三分损益律。因此，太初历的历法数据，基本都与 3 有关。而对与 3 无关的就束手无策，无可解释，而只好不加理会，不予解释。这对一种作为彻底的方法论来说，当然是不能令人满意的。事实上，太初历家对自己的朔望月长度值 $29\frac{43}{81}$ 中的 43 这个数字就没法解释。而对于一个象数《易》学家来说，从 1、2、3、4、5 这些最简单的数字出发，运用加、减、乘、除这些简单的四则运算，几乎可以算出任何一个正整数来，尽管有许多运算和定数是十分牵强可笑的（下面我们会介绍），但总算有了一种说法。

（二）序言中的《易》和象数《易》

刘歆首先以《易·革卦》中的两句名言为自己历法的旗帜。该卦象辞中说：“汤武革命，顺乎天而应乎人。”该卦象辞中又说：“治历明时。”有了这两句话作旗帜，刘歆就可以私人身份来研究历法。刘歆说，这是“所以和人道也。”[①]他的历法工作也就有了重大的社会意义。

照刘歆看来，《易》甚至是和《春秋》相一致的。他说：

> 《（春秋）经》元一以统始，《易》太极之首也。春秋二以目岁，《易》两仪之中也。於春每月书王，《易》三极之

① 《汉书·律历志上》。以下刘歆及《三统历》原文，如无特别声明，则均引自《汉书·律历志上》。

> 统也。於四时虽亡事，必书时月，《易》四象之节也。时月以建分、至、启、闭之分，《易》八卦之位也。象事成败，《易》吉凶之效也。朝聘会盟，《易》大业之本也。故《易》与《春秋》，天人之道也。

把《春秋》一书中作为编年体史书所必需的时间坐标系统一一与《易》相联系。由此不但使《春秋》和《易》相联系，而且使《春秋》一书也具有了神秘的色彩。《易》和《春秋》二书讲的是"天人之道"，而天人之道的表现就在时间坐标系统即历法问题上。

既然时间系统有了神秘的意义，那么用象数《易》的数字来解释历法就有了依据。故刘歆引《春秋左传》中的话说："《传》曰：'龟，象也。筮，数也。'物生而后有象，象而后有滋。滋而后有数。"①

在序言中刘歆就给出了用象数《易》来解释历法的几个例子。先定出几个数字的神秘定义：

元始有象＝1
《春　秋》＝2
三　　统＝3
四　　时＝4

以上这4个数相加为10。以5乘10，称之为"成五体"，得50，就是《易·系辞上》中的大衍之数。其中之一，刘歆称之为道。50去"其一"，其余49，"所当用也，故蓍以为数"。②

---

① 这一段话，唐颜师古在注《汉书》时指出，乃是"《左氏传》载韩简之言也"。但他引的原文与刘歆所引不同："物生则有象，有象而滋益，滋益乃数起。龟以象告吉凶，筮以数示祸福。"

② 《易·系辞上》原文为："大衍之数五十，其用四十有九。"对另一个不用的并无任何说法。而刘歆则解之为"道"。

将这个余数“以象两两之；又以象三三之；又以象四四之；又归奇象闰十九及所据一加之；因以再扐两之，是为月法之实”。译成算式就是：$[49\times2\times3\times4+19+1]\times2=2392$。[①] 这就是化成假分数的朔望月平均长度。以日法 81 除之，即得 $29\frac{43}{81}$，于是就避免了对 43 解释之苦。

接着又引《易·系辞上》中一段有名的象数语言：

> 天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。

《易·系辞》的作者把从 1 到 10 这 10 个数目分成二类，5 个是奇数：1、3、5、7、9，称之为天数。5 个是偶数：2、4、6、8、10，称之为地数。5 个天数之和是 25，5 个地数之和是 30。全部 10 个数加起来，是 55，称为天地之数。“五位相得而各有合”之句，被历代注释家认为是古代一种神秘的数字图形——“河图”的反映，如图 4—1。所谓“成变化而行鬼神”则当是指对“河图”上这 10 个数运用四则运算，可以得到任意一个正整数，也即，能算出万事万物来。这自然是可以说“行鬼神”了。请看刘歆的历法数据：

闰法 19＝9＋10

---

① 《易·系辞上》原文为：“分而为二以象两；挂一以象三；揲之以四以象四时；归奇于扐以象闰；五岁再闰，故再扐而后挂。”其各种数字之象征意义和算法与刘歆所说都不同。可见，刘歆只是借用其名辞，以显示其神秘意义而已。
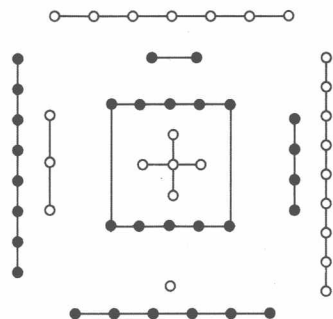
图 4—1 河图示意

这两个数都是天、地之数中最大的，人称终数。

会数 $47=3\times9+2\times10$

朔望之会 $135=3\times25+2\times30$

会月 $6345=47\times135$

章月 $235=47\times5$

中法 $140530=235\times\frac{2392}{4}$

周至 $57=3\times19$

七扐之数＝一月之闰法

$$=\frac{140530-57\times2392}{140530}=\frac{7}{235}$$

虽然越到后面的数字，其神秘意义越不明显，但既然是由前面具有神秘性的数字推演出来的，包含了神秘意义，在刘歆看来乃是再自然不过的事。

以上是就基本数据而言。刘歆还提出了一种庞大的周期，认为经过这一庞大周期之后，日月五星等天体的运动又回复到太极上元的状态。这个庞大周期数也是以神秘数据为出发点推求出来的，而且是配合《易·系辞上》而来的。

《易·系辞上》中说道：

> 乾之策二百一十有六；坤之策，百四十有四。凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成易。十有八变而成卦。八卦而小成。引而伸之。触类而长之。天下之能事毕矣！

刘歆的"复于太极上元"的算法乃是以上引《易·系辞上》的话为纲而展开的：

以"微"为1，则

著＝3×1

象＝3著＝3×3×1＝9

卦＝2象＝2×9＝18

此即"十有八变而成卦"。

易＝4×18＝72

此即"四营而成易"。

易又等于"参三统、两四时相乘之数"即：

72＝3×3×2×4

乾之策216＝3×72

坤之策144＝2×72

72×9＝648

此被称为"以阳九九之"；

72×6＝432

此被称为"以阴六六之"。

648＋432＝1080

此被称为"阴阳各一卦之微算策"。其实质即以1策＝3微算策。

八卦小成＝8×1080＝8640

引而信之[1]，即：

$8\times$八卦小成$=69120$

$69120\times2=138240$

此被称为"天地再之"，并名之为"然后大成，五星会终"。这所谓"五星会终"是指五星会合周期的最小共同周期，即五个数据的最小公倍数。在后文三统历的术文中给出五星的会合周期数，称为五星岁数。它们分别是：

木星岁数 $1728=2^6\times3^3$

金星岁数 $3456=2^7\times3^3$

土星岁数 $4320=2^5\times3^3\times5$

火星岁数 $13824=2^9\times3^3$

水星岁数 $9216=2^{10}\times3^2$

它们的最小共同周期为 $2^{10}\times3^3\times5=138240$。

$138240\times19=2626560$

此被称为"触类而长之"，其结果为"与日月会"。这意思是指从太极上元开始经过 2626560 年后不但五星重又相会，且与冬至和合朔也都相会。那是因为三统历也接受 19 年 7 闰的法则。故只要数据中包含 19 年这个因素，即可成为冬至和合朔都相会的周期数。

3 会$=3\times2626560=7879680$

此被称为"与一统会"[2]。其意义是指五星、冬至、合朔又相会在每天的起始时刻，这个日的起始时刻至迟从太初历开始是定在每日的夜半（用现代通俗的说法即半夜 12 时正）。按照三统历的

---

① 《易》原文作"引而伸之"。颜师古注《汉书》，对之注道，"信读曰伸"。

② 《汉书·律历志上》原文作"与三统会"。事实上，1539 年只是一统。且"与三统会"句之下接着又是"三统……"，显然前后不协。故知"与三统会"，当为"与一统会"之讹误。

基本数据，从某个冬至、合朔发生在夜半的时刻开始，经过1539年，才能又发生冬至、合朔在夜半的现象。$1539=19\times3^4$。而1会的年数中只有3^3的因子，故必须取3会。

$$三统(会)=3\times一统会$$
$$=3\times7879680=23639040$$

此数的含义指，如果起始是五星、冬至、合朔均相会于甲子日的夜半，则过三统会之后，同一天象又会发生在甲子日的夜半。刘歆称之为“复于太极上元”。

$$太极上元\div(19\times9\times6)=23040$$

式中的9，即《易》中所说的阳爻的代表数，而式中的6即为阴爻的代表数。这样求得的数，正好是《易·系辞上》中的万物之数的2倍，故刘歆取一半，称之为“阴、阳各万一千五百二十，当万物气体之数，天下之能事毕矣！”

《易》以11520为万物之数，这是在生产力极为低下，人的认识能力极其有限的情况下才会有的概念。到刘歆的时代，生产力较之《易·系辞上》的写作时代要高出许多，故他已经明白，天下万物当然绝不止11520之数。于是，他改之为“万物气体之数”。加上了玄妙的气体两字，则自然人们就无法以实有数来要求它。但不过这样一来，神秘数字就缺乏了物的底蕴，也就失去了存在的价值。这是刘歆数字神秘主义的悲剧。

二、《三统历》术文

《三统历》术文，记于《汉书·律历志下》中的，共六篇，即，统母、纪母、五步、统术、纪术、岁术。今分述之。

(一)统母

《三统历》术文篇首集中了三统历各项基本数据。其中大体

又分两部分。一部分是关于日、月的数据，称为统母。另一部分则是关于五星的数据，称为纪母。

统母的全部数据如下：

日法：81。刘歆仍称之为“元始黄钟初九自乘”。又称之为“一龠之数”。黄钟初九自乘是太初历的说法。三统历仍然继承。至于所谓“一龠之数”中的龠，乃是一种量体积的单位。《汉书·律历志上》在前部有段文字讲到：

> 量者，龠、合、升、斗、斛也。所以量多少也。本起于黄钟之龠。……以子谷秬黍中者千有二百实其龠。以井水准其概。……龠者，黄钟律之实也。

这段文字把音乐和度量衡联在了一起。而日法81又来自黄钟律管九寸的自乘。由此又使音乐和天文联在了一起。这样，音律、天文、度量衡等，在《汉书·律历志》中都结成了一体。这种观念大概已远比邓平、落下闳等太初历的作者们要走得更远了。

闰法：19。这是三统历使用的置闰规则：19年7闰。故《汉书·律历志下》载，“因为章岁”。古人以冬至和合朔相会在同一时刻的周期为一章。章岁就是一章的年数，故，此章岁为19年。刘歆又称“合天地终数，得闰法。”这句在上文已解释过。

统法：1539。以闰法乘日法而得。经过1统之年，冬至和合朔再次相会在同一日的夜半时刻。

元法：4617。这是统法的3倍。经过1元之年，冬至和合朔再次相会在甲子日的夜半时刻。

会数：47。刘歆重复前文的神秘说法：参天九，两地十，得会数。

章月：235。刘歆称“五位乘会数，得章月”。5×47固然是235。但章月的天文意义是一章岁中所含有的朔望月数，即

$12 \times 19 + 7 = 235$。

月法：2392。刘歆对此称："推大衍象，得月法"。这里只用一句话就代表了上文中所提到的复杂而神秘的公式。

通法：598。这是月法的 1/4。

中法：140530。前文已提到它的算法。清钱大昕指出[①]，如用元法 4617 除之，得 $30\frac{2020}{4617}$，这就是两个中气之间的时间间隔，或者也可称之为一个中气的时间长度。事实上，一个回归年的时间长度为 $365\frac{385}{1539}$ 日[②]。一年 12 个中气，故一个中气的时间长度为

$365\frac{385}{1539} \div 12 = \frac{\frac{562120}{1539}}{12} = \frac{140530}{1539 \times 3} = \frac{140530}{4617}$。三统历统母数据都取整数。故以 140530 为中法。

周天：562120。以章月乘月法而得。这是以 1 日分为 1539 分的一个回归年长度分值。古人认为太阳的运动是均匀的。故将周天一圈划分成以日为单位的一个回归年长度的刻度，这样，太阳在星空背景上 1 天就走 1 度。而刘歆在此处分周天刻度时，只考虑了 1 回归年长度的分子数，却并未写出它的分母。这是因为它的分母即统法，已在前面给出，在后文计算中凡要归结出度数时，自会有相应的计算步骤提出，故在篇首的统母数据中可以不管这个分母。这种手法在中国古代历法中是惯用的。

---

① 见钱大昕：《三统术衍》卷二。

② 三统历的期望月长度取为 $29\frac{43}{81}$ 日，又取 19 年 7 闰的规则，这些都和太初历一致，故其回归年的长度也和太初历一致为：$\frac{29\frac{43}{81} \times (12 \times 19 + 7)}{19} = \frac{2392 \times 235}{19 \times 81} = \frac{562120}{1539} = 365\frac{385}{1539}$。

岁中:12。刘歆称此12的来历为"以三统乘四时,得岁中"。所谓岁中,就是指一个回归年中有的中气数。按一年分二十四节气的制度,则岁中为12本是十分自然的事。但刘歆却要将四时去乘三统,即认为,每一季节都有三统,这就变成一年有12统。此举实在令人不可解。在这里,刘歆为了使数字带上神秘色彩,就牺牲了数据本身的天文意义,实在不可取。

月周:254。刘歆称,"以章月加闰法,得月周"。月周,实际就是一章中的恒星月数目。所谓恒星月,是指地上的人看来,月亮从某个恒星背景出发,从西向东,绕天一周,又回到原来的恒星背景之上,所需的时间长度。由于在这一段时间里,太阳也在星空背景上向东缓慢移动着,故一个恒星月之后,月亮相对于太阳而言,并不回到同一个方向。必须再赶一段时间,才会回到相对太阳而言的同一个方向。这种相对太阳而言月亮回到同一个方向所需的时间,即一个朔望月。故一个朔望月总是大于一个恒星月。经过一个回归年之后,太阳绕天一周,月亮也整整多赶了一周。所以,在一个回归年中,恒星月的个数正好比朔望月的个数多1个。1章有19年,故1章的恒星月数比朔望月数正好多19个。这就是章月加闰法得月周的来历。

朔望之会:135。其神秘算法已在上文述及。实际上这是个极为重要的科学数据。它是中国现知最早的数据确凿的交食周期[①]。在地上的人看来,月亮走到与太阳同一个方向上,月亮挡住了太阳,就发生日食。太阳走到地球背面,向前投射出一条地球的影子。当月亮走到地影中时,就发生月食。月亮在星空背景所走的轨道叫白道。太阳在星空背景上所走的轨道叫黄道。白道和黄道有一个交角。而且黄白二道的两个交点又在沿着黄道做

---

① 在此之前,《史记·天官书》中已记有一种交食周期。但因数千年传抄之误,已不可知其确切数据。

缓慢的运动。由于这些复杂运动的关系，所以，虽然古人早就知道日食发生在朔，月食发生在望，但却不是每逢朔都有日食，每逢望都有月食。只有当朔、望发生在日、月都在黄白交点附近时，才会有日食或月食。月亮从一个交点出发绕天一周回到同一个交点所需的时间叫一个交点月。太阳从一个交点出发回到同一个交点的时间长度叫一个交点年。朔望月、交点月、交点年这三个数据都是无理数，彼此之间也不可通约。但是，总可以找到一种相对而言比较简单的比率，使朔望月、交点月、交点年这三个数据中的某两个的比率与之十分接近。此时，日、月、地三者相对于某个黄白交点而言大体上又回到原来的情况。于是，过去发生的日食和月食情况大体又相继重复出现。这种比率所决定的朔望月数、交点月或交点年数，就称为交食周期。三统历的数据本是重要的科学成果①，但经刘歆一神秘化，使人顿时莫名其妙。

会月：6345。以会数 47 乘朔望之会 135 朔望月就得会月。事实上会月乃一章朔望月数和一会朔望月数的最小公倍数。

统月：19035。此数乃会月数的 3 倍。它也是 1 统 1539 年中所含的朔望月数。因为 1 统共 81 章（1539＝19×81），故统月＝81×235＝19035。

元月：57105。这是统月的 3 倍，因为 1 元之年 4617 是 1 统之年 1539 的 3 倍。

章中：228。这是 1 章 19 年所含的中气数。1 年有 12 中气，故章中 228＝12×19。

统中：18468。这是 1 统的中气数，即以章中数乘 81 章，可得。

---

① 根据现代天文学的精密测算，1 朔望月＝29.53059 日，1 交点月＝27.21222 日，1 交点年＝346.62003 日。135 朔望月＝3986.62965 日，146.5 交点月＝3986.59033 日，11.5 交点年＝3986.13034 日。后 3 个数据最大相差不过 0.5 日。可见，作为交食周期，135 朔望月的数据是有一定科学性的。

元中：55404。这是1元的中气数，以统中数乘3而得。

策余：8080。这里所谓的策余是指将一个回归年多于360日的部分化成分数后的分子数。三统历一回归年为$365\frac{385}{1539}$日，比360日多出$5\frac{385}{1539}$日。化成分数为$\frac{8080}{1539}$日，故三统历取策余为8080。而刘歆在本项下注的得数来源是："什乘元中，以减周天"。即，策余＝562120－10×55404＝8080。其数值虽然一致，但其天文意义却湮而不彰。

周至：57。刘歆称："参闰法，得周至。"钱大昕则称"四分章中之一"为周至[①]，两者结果一样。

(二)纪母[②]

木、金、土、火、水五颗行星，古代总称五星。它们在星空背景上做显著的有规律的运动。古代天文学家对它们的运动很注意。长沙马王堆汉墓帛书《五星占》中就有相当详细地介绍五星运动的推算和占候的记载。作为历法的一部分，五星运动的预推究竟从哪一部历法开始的，因为缺乏资料，现在还难断言。但至少，太初历应该已经具有。《汉书·律历志上》记载到太初改历时曾说，当初曾命宦者淳于陵渠检校过太初历。淳于陵渠在奏复时不但称"太初历晦、朔、弦、望皆最密"，而且是"日月如合璧，五星如连珠"。尽管这里说的是太初历历元时日月五星的位置状态，但是，如果没有有关五星运动的推步知识，那是不可能得到这个结论的。但是，由于太初历的术文已经失传，因此，三统历就成为第一部留下有关五星运动的详细算法的中国历法。

---

① 据李锐《三统术注》卷二改。原《汉书》各本作"统母"。

② 《汉书·律历志下》将"纪母"仍称为"统母"，由此形成重复。李锐在《三统术注》中指出，此"统母"为"纪母"之误。今从此说。

现代天文学告诉我们，古人所认识的五星中，火、木、土三颗行星属于外行星，即，它们绕日运动的轨道在地球绕日轨道之外。另外，水、金二星则属于内行星，即，它们的轨道在地球轨道之内。在地球上的观测者来看，内行星和外行星的运动有一些不同。外行星的绕日运动速度比地球要慢。对于地球上的观测者而言，它们在一个会合周期中只与太阳有一次合，然后，慢慢地行星在太阳的西边出现。这时是在凌晨日出之前，靠近东方的地平线。以后行星离太阳越来越远。到与太阳相距 180°时，外行星离地球最近，称为冲。以后又从太阳的东边向之越来越靠近。最后在将日落时，因靠近太阳太近而被淹没在太阳光里。

内行星在一个会合周期里会与太阳合二次。一次在太阳的背后，称为上合；一次在地球与太阳之间，称为下合。内行星与太阳的角距离有个限度，称为大距。它在上合之后的若干天，与外行星一样，早晨出现于东方。但它在达到东大距之后若干天，又在早晨淹没于东方日出的阳光里。然后经过下合，转在黄昏时出现在西方。待到达到西大距之后，又在黄昏时淹没在西方的太阳光里。

这些不同的运动现象，古人当然说不清它的原因，但是现象的本身却可以观测得很仔细，而且推算也会有进步。在《三统历》的统母篇里，刘歆给出的数据就比帛书《五星占》的数据精确性有很大提高。由于上面所说的地面观测者所见的外行星和内行星的运动状态不同，但是三颗外行星之间和两颗内行星之间却又彼此相似，故下面我们只介绍外行星中的木星和内行星中的金星的运动状态和数据。其他三颗星则分别在两份表格中统一给出，而不做进一步的说明了。

1. 关于木星

木星古称岁星。古人认为，木星 12 年绕天 1 周。因而分周天 1 圈为 12 等份，称为 12 次。木星 1 年走 1 次。这样，可以根据岁星所在的星空位置来纪年，因而称为岁星。

但是,12 年一周天的木星恒星周期其实是粗略的。汉代已发现,实际的恒星周期不到 12 年。或者用另一种说法则是,过了 12 年之后木星走过了比一周天还多的路程。在三统历中就提出,过了 144 年,木星就会多行 1 次。这就是所谓岁星超辰问题。此事下面将会谈到。

岁星岁数:1728。1728=144×12。这意味着木星过了 1728 年后在天上行了 145 圈整周天。因此,岁数的天文意义是指行星在天上走整周天圈数所需的最少整年数。然而刘歆对此也用了神秘复杂的解释:"木金相乘为十二,是为岁星小周,小周乘巛策,为千七百二十八"。这里的"木金相乘为十二",就引进了洛书数的概念。洛书数把从 1 到 10 这 10 个自然数分配给五行。从 1 到 5 这 5 个数的五行分配是:1 水、2 火、3 木、4 金、5 土。故刘歆以木星数为 3,又取其五行相克之物为金,金数为 4。故有"木金相乘为十二"之说。又,木星数为 3,3 为奇数,为阳。故将 12 再乘巛策。巛为坤的古字。巛策 144,这在前文中已谈到。12×144=1728。数字是凑出来了,刘歆,或许还有古代的象数学家对之很为满意,但天文意义却完全掩盖不见了。而且,这种凑数方法也并不能五星都一致。故此,凑得虽然好像很漂亮,实际却毫无价值。

见中分:20736。此数等于 1728×12。故知见中分为木星一个岁数中所含的中气个数。

积中:13;中余:157。这两个数字的意义下文再述。

见中法:1583。三统历既取 1728 年木星行 145 周天,则木星的恒星周期为$\frac{1728}{145}$年。根据现代天文学上的公式,对于行星而言,它的会合周期(对地上观测者而言,行星与太阳连续两次相合的时间长度)和恒星周期有如下公式:$\frac{1}{\text{会合周期}}=1-\frac{1}{\text{恒星周期}}$。由此可算得木星的会合周期为$\frac{1728}{1583}$年。于是可得,在 1728 年中,

木星与太阳会合共 $1728/\frac{1728}{1583}=1583$ 次。这就是见中法的天文意义[①]。又,1728 年内有 20736 个中气。则会合 1 次的中气数为 $\frac{20736}{1583}=13\frac{157}{1583}$。此 13 即上文之积中,而 157 即为中余。顺便说一句,见中法在后文中又称为大统见复数。

见闰分:12096。因为 19 年中有 7 个闰月。1728 年中则有闰月数为:$1728\times\frac{7}{19}=\frac{12096}{19}$。故称 12096 为见闰分。

积月:13;月余:15079。意义见下文。

见月法:30077。1 木星岁数中有朔望月数为:$1728\times\frac{235}{19}=\frac{406080}{19}$,则一个会合周期中的朔望月数为:$\frac{406080}{19}/1583=13\frac{15079}{1583\times19}=13\frac{15079}{30077}$。13 即上述的积月数。分子 15079 即上文的月余。而分母即为见月法。

见中日法:7308711。该数等于 4617×1583。其意义见下。

见月日法:2436237。此数等于 $30077\times81=1583\times19\times81=1583\times1539$。此数源起于见月法与日法的通分,即,为二者的共同分母。而见中日法则为见月日法的 3 倍。

2. 关于金星

金星古名太白。因它是天空中除了日、月之外最亮的天体;且在人目看来,它呈白色,故名太白。

金星岁数:3456。此数的天文意义与木星岁数同。但刘歆对其数的来源则说得更甚:"金火相乘为八。又以火乘之,为十六而小

---

① 在早期,古人不用从合到下次合为一个会合周期,而是取早晨行星初见于东方,到下一次早晨初见于东方,为一个会合周期,并称此周期为"一见"。故这里也称"见中法",或如原文注解,称"见数"。

复。小复乘乾策为三千四百五十六”。金为4。火克金，火为2。故有“金火相乘为八”之说。但“又以火乘之，为十六而小复”，却与木、土等星的算例不协，就是从象数学的观点来看，也觉意外。金既为4，则为偶数，为阴。故取小复16乘乾策216。由此得3456。

金星的大部分数据，其意义和求法与木星的有关数据相似。但因金星是内行星，故有晨见和夕见两种情况（所以，金星的一个会合周期不称为一见，而称一复。水星也一样）。因此，尽管有外行星的全部9项数据，却在此外又有8项分配为晨、夕两部分的数据（这些数据却是木、火、土三颗外行星所没有的）。它们是晨中分、夕中分及各自的积中、中余；晨闰分、夕闰分及各闰的积月、月余。其意义和见中分、见闰分的意义极其相似。因此，下文我们将以表格的形式排出所有这些数据（表4—1）。在此需要指出的一点是，从金星（水星也是一样）的晨中分、夕中分和晨闰分、夕闰分分析可知，它们都具有9∶7的固定比例。

此外，还需要介绍的也许就是土、火、水星的岁数的神秘算法了。但也许并不是大家对之都感兴趣，因此，我们只将它们放在小注里给出，以便供有兴趣的读者查考①。

---

① 土星岁数：4320。算法：“土木相乘而合纬经为三十，是为镇星小周。小周乘巛策，为四千三百二十。”土数5；木克土，木数3。3×5＝15。所谓“合经纬”就是将原数2倍，得30。土5为奇数，为阳数，故乘巛策。30×144＝4320。

火星岁数：13824。其算法：“火经特成，故二岁而过初，三十二过初为六十四岁而小周。小周乘乾策，则太阳大周，为万三千八百二十四岁。”说起来算式很简单：2×32×216＝13824。其中火数2，为阴数，故乘乾策。至于为什么要32过初，则无任何解释。

水星岁数：9216。算法：“水经特成，故一岁而及初，六十四及初而小复。小复乘巛策，则太阴大周，为九千二百一十六岁。”水数1，故，乘巛策。但为什么要取64及初，以及为什么不乘相克的土数5？均无解释。

土星古名填星，火星古名荧惑，水星古名辰星。各有其原由，在此不赘。

表 4—1　五星纪母表

	木	金	土	火	水
岁数	1728	3456	4320	13824	9216
见中分＝岁数×12	20736	41472	51840	165888	110592
积中$\frac{中余}{见中法}=\frac{见中分}{见中法}$＝1 见之中气数	$13\frac{157}{1583}$	$19\frac{413}{2161}$	$12\frac{1740}{4175}$	$25\frac{4163}{6469}$	$3\frac{23469}{29041}$①
见中法＝1 岁数中所含见、复数	1583	2161	4175	6469	29041
见闰分＝岁数×7	12096	24192	30240	96768	64512
积月$\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times235}{见月法}$	$13\frac{15079}{30077}$	$19\frac{32039}{41059}$	$12\frac{63300}{79325}$	$26\frac{52954}{122911}$	$3\frac{510423}{551779}$
见月法＝见中法×19	30077	41059	79325	122911	551779
见中日法＝3×见月日法	7308711	9977337	19275975	29867373	134082297
见月日法＝见中法×1539	2436237	3325779	6425325	9955791	44694099

①《汉书》原文为“中余三万二千四百六十九”。经校算，应为“中余二万三千四百六十九”。

续表

	木	金	土	火	水
晨中分＝见中分$\times\frac{9}{16}$		23328			62208
晨积中$\frac{中余}{见中法}=\frac{晨中分}{见中法}$		$10\frac{1718}{2161}$			$2\frac{4126}{29041}$
夕中分＝见中分$\times\frac{7}{16}$		18144			48384
夕积中$\frac{中余}{见中法}=\frac{夕中分}{见中法}$		$8\frac{856}{2161}$			$1\frac{19343}{29041}$
晨闰分＝见闰分$\times\frac{9}{16}$		13608			36288
晨积月$\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times 235}{见月法}\times\frac{9}{16}$		$11\frac{5191}{41059}$			$2\frac{114682}{551779}$
夕闰分＝见闰分$\times\frac{7}{16}$		10584			28224
夕积月$\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times 235}{见月法}\times\frac{7}{16}$		$8\frac{26848}{41059}$			$1\frac{395741}{551779}$

(三)五步

“五步”其实是一份五星在一个会合周期中的动态表，不过是用文字叙述而已(见表4—2和表4—3)。表中有几个名词应该解释一下：

顺行：行星在星空背景上从西往东运动。

逆行：由于地球也在绕日运动，所以行星在星空背景上的运动是行星和地球绕日运动的合成结果。在地上观测者看来，行星有时会从东往西运动。这种运动称为逆行。

留：从顺行转变到逆行，或从逆行转变为顺行时，将会有一段时间行星好像完全停止不动。这样现象称为留。

伏：行星走到太阳附近，被太阳光淹没不见，称为伏。

始见：行星刚刚脱离被太阳光淹没状态的时刻。

(四)统术

以上统母、纪母和五步可说是三统历所给出的种种天文数据。而下面的统术、纪术、岁术则是三统历的计算方法。本篇统术乃是讲的计算节气、朔、闰及日、月位置和月食等项。

1. 推日、月元统

设立这项算法是因为三统历的历元——太极上元，是个很大的数字。它与现实需推求历日的年份相去过于遥远。这使得整个运算非常笨重、累赘，为此设立了本项计算，以求一个较近的近距历元以来的年数，以减轻以后的计算劳动。其具体算法如下：

设从太极上元以来到所求历日之年为S，则可求得：

$$s=[S/4617]_R$$

这里的太极上元究竟是在哪一年，基本数据中没有给出，但在后文的《世经》篇里多次给出了从三统历上元到发生重大历史

表 4—2 外行星动态表

	木星		土星		火星	
动态	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数
晨始见		(去日半次)		(去日半次)		(去日半次)
顺行	121	2/11	87	1/15	276	53/92
留	25	0	34	0	10	0
逆行	84	1/7	101	5/81	62	17/62
留	$24\frac{3}{7308711}$	0	$33\frac{862455}{19275975}$	0	10	0
顺行	$111\frac{1828362}{7308711}$	2/11	85	1/15	276	53/92
伏	$33\frac{3330737}{7308711}$	共行 $3\frac{1673451}{7308711}$	$37\frac{17170170}{19275975}$	共行 $7\frac{8736570}{19275975}$	$146\frac{15689700}{29867373}$	共行 $114\frac{8218005}{29867373}$
一见	$398\frac{5163012}{7308711}$	星行 $33\frac{3334737}{7308711}$	$377\frac{18032625}{19275975}$	星行 $12\frac{13210500}{19275975}$	$780\frac{15689700}{29867373}$	星行 $415\frac{8218005}{29867373}$
日行		145/1728		145/4320		7355/13824

表 4—3 内行星动态表

动 态	金星 时间(日)	金星 日行度数	水星 时间(日)	水星 日行度数
晨始见		(去日半次)		(去日半次)
逆 行	6	$\frac{1}{2}$	1	2
留	8	0	2	0
顺 行	46	$\frac{33}{46}$	7	$\frac{6}{7}$
顺行疾	184	$1\frac{15}{92}$	18	$1\frac{1}{3}$
伏	83	$1\frac{33\text{有奇}^{①}}{92}$	$37\frac{122029605}{134082297}$	$1\frac{7\text{有奇}^{②}}{9}$
晨见伏	总共 327	行星 $357\frac{4365220}{9977337}$	$65\frac{122029605}{134082297}$	行 $96\frac{46610128}{134082297}$
夕始见		(去日半次)		(去日半次)
顺 行	$181\frac{45}{107}$	$1\frac{15}{92}$	$16\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$
顺行迟	46	$\frac{33}{46}$	7	$\frac{6}{7}$
留	$7\frac{62}{107}$	0	$1\frac{1}{2}$	0

续表

	金　星		水　星	
动　态	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数
逆　行	6	$\frac{1}{2}$	1	2
伏　逆	$16\frac{1295352}{9977337}$	星行 $14\frac{3069868}{9977337}$[3]	24	$6\frac{58662820}{134082297}$[4]
夕见伏	总共 $257\frac{1295352}{9977337}$	星行 $226\frac{6907649}{9977337}$	50	行星 $19\frac{15419477}{134082297}$
一　复	共 $584\frac{1295352}{9977337}$	星行 $584\frac{1295352}{9977337}$	$115\frac{122029605}{134082297}$	行星$\frac{122029605}{134082297}$

注:①按有关数据推算,可知,此有奇当为$\frac{611124317}{828118971}$。此数字极为复杂,故文中只得称之为“有奇”。

②伏逆日行也有$\frac{7\text{有奇}}{8}$这样不明确的数字,但根据伏逆日数和星行总数也可算出此有奇的确数。

③此有奇也可根据伏行日数和所行的总度数有得为$\frac{1148663412}{5083074594}$。

④同注②。

事件时的年数，如，到伐桀、伐纣、鲁釐公五年（这一年正月辛亥朔日正好有朔旦冬至相合的天文事件）、汉高祖立国及太初元年等等的年数。《世经》中说道："汉历太初元年距上元十四万三千一百二十七岁"。从这个数字出发，就可以推算太初元年之后任何一年的 S 及 s。

当 $s<$统法 1539，则所求年入天统甲子以来年数。

当 $2\times1539>s\geqslant1539$，则所求年入地统甲辰年以来年数。

当 $4617>s\geqslant2\times1539$，则所求之年入人统甲申以来年数。

2. 推天正

这是指从上元以来到所求之年前十一月之前的全部月份数，古称积月。因三统历将一年二十四节的开始排在冬至，且名冬至所在之月为十一月之故。至于所谓天正，则是指冬至所在之月。地正为冬至所在之月的下一月。而人正则是冬至所在之月的下下一月。

设所求之年的入统岁数为 s。则：

$$s\times235\div19=N+\frac{T}{19}\text{，其中 } T<19$$

则 N 为上元以来至所求年的积月数。而 T 则称为闰余。一个回归年有 $12\frac{7}{19}$ 个朔望月，这 $\frac{7}{19}$ 个朔望月即为闰余。如果上式求出的 $T\geqslant12$，经过一年之后，将有 $T+7\geqslant19$，则，在这一年之内将会有 13 个月，即，会有闰月。

又，以上所求为从太极上元到所求年的前十一月之前积月数。此又称天正积月数。

而求地正积月数则为 $N+1$，求人正积月数，则为 $N+2$。

3. 推(天)正月朔[1]

取上文求得的 $N\times 2392\div 81=n+\frac{t}{81}$。$n$ 称为积日,即从太极上元到所求年天正月朔之前的全部整日数。t 则为该天正月朔不到 1 整日的余数,或者说是该天正月朔时刻到其所在日的夜半起始时刻的时间长度。这个长度以 1 日的$\frac{1}{81}$为单位。

因一个月为 $29\frac{43}{81}$日,故当 $t\geqslant 38$ 时,天正之月将有 $t+29\frac{43}{81}\geqslant$ 30 日,故本月为大月。反之,如 $t<38$,则本月为小月。

又,

$$n'=[n/60]_R$$

60 是干支周一周的日数。用 60 去除积日,就是求天正朔日的干支日名。太极上元之日和天统之首日日名均为甲子。地统首日日名为甲辰,人统首日日名为甲申[2]。因此,从 n'可查干支表得出该日的日名。不过要注意的是,在排日名时应以统首日的日名为 0,这在古代历法术语中称为"算外"。

求得天正朔日的日名和合朔时刻(n'日 t 时刻)之后,以后的上弦、下弦、望和次月朔等都好求了。因为三统历还是认为月亮运动是均匀等速的。故,求上弦,就是 $n'+7$,$t+31$;求望,$n'+14$,$t+62$;求下弦,$n'+22$,$t+(93-81=)12$;求次月朔,则 $n'+29$,$t+43$。如此等等。

---

① 原文为推正月朔。但三统历既然从冬至之月算起,则所求不应是正月朔,而是天正月朔,即,夺落"天"字。

② 一回归年$=365\frac{385}{1539}$日$=\frac{562120}{1539}$日。此数以 60 除之,余 40。故如天统之首日为甲子,则地统之首日必为甲辰。同理,人统之首日必为甲申。这是三统历数据的必然结果。三统历也因此以这个首日的干支来命名这三个年份。称天统之首年为甲子,地统之首年为甲辰,人统之首为甲申。

4. 推闰余所在

这是求应取何月为闰月。当 $T\geqslant 12$ 时，这年有闰，但应闰何月？在古代，比如从春秋到汉初，大体都是把闰月放在年末，叫作“归余于终”。这当然很好办。但汉初以来二十四节气制度发展起来。由此可以提出，让中气保持在固定月份，而以无中气之月为闰月的规则。这样可以使中气、月份与物候相差不致太远，以利于农业生产和社会生活安排。

$$1\text{ 回归年}=12\frac{7}{19}\text{朔望月}=12\text{ 个中气}$$ ①

$$1\text{ 太阴年}=12\text{ 朔望月}$$

$$1\text{ 回归年}-1\text{ 太阴年}=\frac{7}{19}\text{朔望月}$$

$$1\text{ 中气}-1\text{ 朔望月}=\frac{7}{19\times 12}\text{朔望月}$$

如果从统首气、朔相合于同一日的夜半开始，则每过 1 个朔望月，合朔与相应的中气就差了 $\frac{7}{19\times 12}$ 朔望月。如此逐月积累，合朔与相应中气的差距越来越远，当这差距大于 1 朔望月时，这就意味着这个月内将没有中气。如果把这个月定为闰月，即，不计算它的月序，则下个月序之月就又会包含有相应的中气了。当然在计算上我们不必如此复杂，一定要逐个地从统首之月算起。

前已提到，当 $T\geqslant 12$ 时，这一年将有闰月。因为此时过了一年之后必有 $7+T\geqslant 19$. 或 $\frac{7}{19}+\frac{T}{19}\geqslant 1$。其实不一定必须过一年才会有上述不等式。例如取某个适当的 i，就会有：

$$\frac{7}{19}\times\frac{i}{12}+\frac{T}{19}\geqslant 1\text{，或 }7i+12T\geqslant 228$$

① 这里的 1 个中气是指从本中气到下一个中气的时间长度，而不是纯粹的中气个数。

式中的 $i=1$、2、3、…、12 这 12 个数中最小的一个数。则天正之月以后的第 i 个月就是闰月。

5. 推冬至

这是求冬至的干支日名和时刻。因为一个回归年的时间长度为 360 日 $+\frac{8080}{1539}$ 日，而 360 日可为 60 除尽，故可弃去。将入统岁数 s 乘以该余数部分 $\frac{8080}{1539}$，其结果的整数部分可称之为积策余日。其日以下的余数部分也名之为小余。写成公式是：$S\times 8080\div 1539=H+\frac{h}{1539}$。式中小余 $h<1539$。将积策余日 H 再以干支周 60 去整求余，即以 $H'=[H/60]_R$。H' 即从统首日干支日名算外的冬至日干支日名，称为大余[①]，而小余 h 则为冬至的时刻。

6. 推八节

一年二十四节气中又有所谓八节。这是指立春、立夏、立秋、立冬这四立和二分、二至，共 8 个节气。

1 节的时间长度为 $(360+\frac{8080}{1539})$ 日 $\div 8=45$ 日 $+\frac{1010}{1539}$ 日。故从冬至时刻求立春时刻，就可以将冬至大余加 45（仍然是满 60，除去之），小余加 1080（满 1539，除去之，并将大余增加 1）。以下求春分、立夏等均可如法求之。

二十四节气中 1 节气的时间长度为 1 节时间长度的 1/3。即，1 节气 $=15\ \frac{1010}{1539\times 3}$ 日 $=15\ \frac{1010}{4617}$ 日。将此数累加到冬至的大、小余之上，即可求出小寒、大寒……二十四节气的日名和时

---

① 原文中误将 H 称为大余，这是与三统历全文不协调的，也与古代各种历法的定义不合。考其原因，乃是有脱讹文。在“以策余乘入统岁数。盈统法得一”之后当或有“名曰积策余日。不盈者名曰小余。积策余日盈 60 除之。不盈者名曰大余。”

刻。不过要注意的是，此时的小余是以 1539×3＝4617＝元法为分母的，故原文中称“推中部二十四节，皆以元为法”。

7. 推五行

这里的五行是指将一回归年分成五个长度相等的部分，按一定的规则将之分配均匀，并求出其相应的开始时刻。

$$365\frac{385}{1539}\text{日}\div 5=73\frac{77}{1539}\text{日}$$

这是五行中一行的时间长度。

以五行配合四季，自有其自然的困难。因此不得不采用种种特殊的方法。三统历的方法是，以四立开始的春、夏、秋、冬四季为木、火、金、水四行，而将土行的时间长度均分为四。

$$\frac{1}{4}\text{行}=\frac{1}{4}(73\frac{77}{1539}\text{日})=18\frac{404}{1539}\text{日}$$

把这每一小段分配到每行之末。例如，从冬至开始，冬季中的土行开始于冬至之后的 $45\frac{1010}{1539}\text{日}-18\frac{404}{1539}\text{日}=27\frac{606}{1539}\text{日}$。将此加到冬至的大、小余上，就得到冬季土行开始的大、小余。

因为从方位的角度来说，土行为中央之行，故各季中土行的开始均称之为中央的开始。春、夏、秋三季的中央的开始的算法，与冬季相仿，不过分别是从春分、夏至、秋分的大、小余算起而已。

8. 推合晨所在星

此处晨为辰之假借。日月之会是谓辰，合辰即是合朔。本项是推算天正合朔时日月所在的位置，这个位置以二十八宿距星所组成的二十八宿赤道（经）度数系统来表示的。如要推算其他月份合朔时日月所在星也可以从本项计算法中举一反三地推出。本项具体算法如下：

前已推得，从统首时刻起到所求年天正月朔的时间长度，以日为单位的数字是：$(n+\frac{t}{81})$日。因为当时认为太阳 1 天行 1 度，

而1周天的度数又正等于1回归年的日数(即 $365\frac{385}{1539}$ 日,或 $\frac{562120}{1539}$ 日),故可有下式:

$$d=\left[\left(n+\frac{t}{81}\right)\times\frac{1539}{562120}\right]_R$$

$D=\frac{d}{1539}$,这就是天正合朔时离统首时刻日月所在位置的距离。三统历认为统首时刻日月位置在牵牛初度,即,正与牵牛距星的赤道经度相合。从这一点算起,根据后文给出的二十八宿赤道度数表,可以推知所求年天正合朔所入的星度数。

9. *推其日夜半所在星*

这是求天正合朔之日的夜半起始时刻太阳所在的赤道经度位置。因为夜半起始时刻当然发生在合朔时刻之前,故应当从上文求出的 D 中减去一个数。$D=\frac{d}{1539}=d_1+\frac{d_2}{1539}$。式中 d_1 为整数,d_2 为余数,即 $d_2<1539$。又,太阳1日才走1度。从夜半到合朔时刻不及1日,故也只是个小数。这个小数即上文求天正合朔时推得的 $\frac{t}{81}$。将此数化成与 d_2 同样的分母,即得:

$$\frac{t}{81}\times1539=t\times19$$

$$d_2-t\times19=d_3$$

则 $d_1+\frac{d_3}{1539}$ 就是天正合朔之日夜半时刻太阳所在的星度。

设,若 $d_3<0$,则可以改成

$$d_1-1+\frac{1539-d_3}{1539}$$

10. *推其月夜半所在星*

这是求天正合朔之日的夜半时刻月亮所在的位置。

1 章有 254 恒星月，故 1 恒星月的时间长度为 $19\times365\frac{385}{1539}\div254$。月亮在 1 恒星月中都走 $365\frac{385}{1539}$度。故每天月亮平均走

$$365\frac{385}{1539}\text{度}\div\left(\frac{19\times365\frac{385}{1539}}{254}\right)=\frac{254}{19}\text{度}。$$

由此可知，从合朔之日的夜半到合朔时月亮共行$\frac{t}{81}\times\frac{254}{19}=\frac{t\times254}{1539}$度。此数从合辰所在星度中减去，即得夜半时月所在星度。

11. 推诸加时

上面所求得的合朔时刻的小余、冬至时刻的小余，都有其各自的分母。这是以 1 日为单位的分数值。但在民用上，都是将 1 日化为 12 时辰，以十二支的名字命名各个时辰。所以，必须将各个小余化成时辰数。

因为，时辰数：12＝小余：分母。

故，时辰数＝小余×12/分母。

此公式对朔小余和冬至小余都适用，不过朔小余的分母为 81，而冬至小余的分母为 1539。时辰数以子时为 0，丑时为 1……

12. 推月食

这是利用月食周期推算未来的月食。

三统历以 135 月为 1 月食周。它与 1 章岁的月数 235 月有个共同周期：会月 6345。统首以来到所求年的天正月朔共有积月 N。此数在上文第二项计算中已求出。

$$N'=[N/6345]_R$$

N'即称为会余岁积月。

三统历以 135 月为太阳过 23 次黄白交点的时间，而只有当

太阳在交点附近时才会有月食，故135月中有23次月食。1次月食平均时间间隔为$\frac{135}{23}$月。$N' \div \frac{135}{23} = N' \times \frac{23}{135}$。这就是三统历术文中所说"置会余岁积月，以二十三乘之，盈百三十五，除之"的由来。

既然以135月为月食周期，故$\frac{N' \times 23}{135}$只是取其余数部分。即$n' = \left[\frac{N' \times 23}{135}\right]_R$，求得此$n'$后，若$n'=0$，则所求年天正之月有食。若$n' \neq 0$，则求解不等式：$n' + 23j \geqslant 135$。式中$j=1、2、3\cdots$。取$j$为最小之数，即天正之月以后的第$j$个月有月食。

月食一定发生在月望。如果不讲求地面观测者和地心观测者所见月食在时刻计算上有差异的问题（此问题其实在交食计算中是很重要的，它在以后的中国历法发展史上有不断深入的探讨），则月食时月面亏缺最大的时刻（称为食甚），正是太阳和月亮相冲的时刻。故原文中记曰："加时在望，日冲辰"。

（五）纪术

本篇讨论五星运动的问题。

1. 推五星见复

讨论五星运动与有关日、月朔、望、中气等的计算不同。有关日、月的运动计算都可以从统首算起，但有关五星运动的计算，却必须从太极上元算起。因为只有在太极上元时才是五星如连珠，成为五星运动中各种周期的共同起点。

设太极上元以来到所求年年末的总年数为Y，某行星的岁数为P，1岁数中该行星的见复数（文中别称为大统见复数）为M，则该行星的会合周期，或1见复的时间长度为$\frac{P}{M}$，其单位为回归年。

$$Y/\frac{P}{M}=m+y/\frac{p}{M}$$

式中右端 m 为正整数，这就是以太极上元以来该行星的整会合周数。

$$Y/\frac{P}{M}=Y\times M/P=m+y'/p$$

这就是三统历术文给出的公式。y'/p 则是不到一个整会合周期的余数。y'则是从上一次见结束到所求年年末的年数 y 与见复数的乘积，即，$y'=y\times M$。由此得：

$$y=y'/M$$

当 $y'\leqslant M$ 时，$y\leqslant 1$，这表示，在所求年之内会有新的会合周期开始，或者换句话说，新的 1 见或 1 复的开始将发生在所求年之内。

当 $2M\geqslant y'>M$ 时，$2\geqslant y>1$。这意味着新的会合周期将发生在所求年上 1 年。

当 $y'>2M$ 时，$y>2$。这意味着新的会合周期将发生在所求年上 2 年。

因为任何一颗行星的会合周期都小于 2 年，故行星的新会合周期一定只能发生在今年、去年或前年，不可能更早了。①

2. 推星所见中次

这是指所求年年度之前开始的行星新会合周期起始时刻，行星所在的中气数和十二次次数。

---

① 这一点可以证明如下：因为一定有 $\frac{p}{M}<2$，即 $p<2M$，故如果有 $y\geqslant 2$，则 $y'\geqslant 2M$。此时必有 $\frac{y'}{p}\geqslant\frac{2M}{p}>\frac{2M}{2M}=1$。也即，必有 $\frac{y'}{p}=1+\frac{y''}{p}$。由是 $\frac{y\times M}{p}=m+1+\frac{y''}{p}$。因此，如果第 m 个会合周期结束于所求年的上 2 年之外，则第 $m+1$ 个会合周期必结束在所求年年底之前的 3 年之内。所以，我们只不过是把 m 这个数小算了 1 而已。

上一项计算中所求得的 m，在术文中被称为定见复数。$m\times\frac{P}{M}$即为以回归年为单位的 m 个会合周的时间总长度。1 回归年有 12 个中气，故 m 个会合周的总中气数为：

$$m\times\frac{P}{M}\times 12=\frac{m\times P\times 12}{M}$$

其中 $P\times 12$ 即为见中分，设为 J。M 又称为见中法。则

$$\frac{m\times J}{M}=Z+\frac{z}{M}$$

其中 Z 为式中所能容许的最大正整数；$0\leqslant z<M$。术文中称 Z 为积中，即，从太极上元起的 m 个会合周期内所含整中气的个数。z 在术文中称为中余。不过千万要注意，这积中 Z 和中余 z 与纪母中的积中、中余是完全不同的两回事。

一元 4617 年的中气数为 $4617\times 12=55404$，称为元中。

$$z_{元}=[Z/55404]_R$$

式中 $z_{元}$ 被称为中元余。

$$z_{章}=[z_{元}/228]_R$$

228 为章中，即 1 章之年的中气数。$z_{章}$ 被称为入章中数。

$$z_c=[z_{章}/12]_R$$

zc 即是星所在的中气数和 12 次次数。其实，因 55404 和 228 都含有 12 的因子，所以上面三个式子的运算也可以会成一个，即

$$z_c=[Z/12]_R$$

中数从冬至起算，即，$z_c=0$，则星见于冬至气；$z_c=1$，星见于大寒气……

次数从星纪次起，即，$z_c=0$，则星见于星纪次；$z_c=1$，星见于玄枵次……

3. 推星见月

这是求一个新会合周期开始时星始见的月份。三统历的思

路是先算出从上元到所求新周期星始见的时间长度中所包含的整朔望月数以及不足1月的余数。从这个整朔望月数就可以求出星始见所在的朔望月为何月。其具体算法如下：

岁数÷见中法＝以年为单位的1见的时间长度

因为19年有7闰月，所以，$\frac{\text{岁数}}{\text{见中法}}\times\frac{7}{19}=1$见的时间内所有的闰月数。岁数×7即见闰分，简称闰分。见中法×19则称为见月法。$\frac{\text{闰分}}{\text{见月法}}\times$定见复数＝自上元以来全部整会合周期内所有的闰月数。此数加上全部上元以来的每年12个月的总月数(其数量正是从上元以来到新的所求的会合周期开始前的全部中气个数。这个数字在上文第2项推算中得知，为：积中$+\frac{\text{中余}}{\text{见中法}}$)。故从上元起到所求的星始见时的总月数为：

$$\frac{\text{闰分}}{\text{见月法}}\times\text{定见复数}+\text{积中}+\frac{\text{中余}}{\text{见中法}}$$

$$=\frac{\text{闰分}\times\text{定见复数}}{\text{见月法}}+\frac{\text{中余}\times 19}{\text{见中法}\times 19}+\text{积中}$$

$$=\frac{\text{闰分}\times\text{定见复数}+\text{中余}\times 19}{\text{见月法}}+\text{积中}$$

$$=\text{积月}+\frac{\text{月余}}{\text{见月法}}$$

上式中的积月是最大的整数，$\frac{\text{月余}}{\text{见月法}}$①则为不到1个月的余数。两者之和即为从太极上元到所求星始见时刻的全部时间长度，其单位则为1个朔望月。不过也应注意，这里的积月、月余和纪母

① 月余，原文作“月中余”。中华书局标点本据钱大昕意见，认为其中的“中”字为衍文，故删去，但李锐《三统术注》对此中字并未删去。愚见，月余一词与中余一词相呼应，中字之有无无关紧要。

篇中的积月、月余是完全不同的两回事。

下面来推求星始见所在之月的月名。此时可以只考虑积月，而不管月余数字，犹如上面第2项的计算中求星始见所在中气时可不管中余的道理一样。

1元有57105个朔望月。将积月数中先1元1元去掉。其不尽的余数称为月元余：

$$月元余=[积月/57105]_R$$

再1章1章去掉，得：

$$入章月数=[月元余/235]_R$$

$$令:入章月数-\sum_{i=0}^{n}(12\times i+k_i)=A$$

式中 i 为入章以来的年份数。n 为入章以来到星始见所在之年的上一年的总年数。又，当 i 指有闰之年时，则 $k_i=1$。当 i 为无闰之年时，则 $k_i=0$。又，上式中求得之 A 必须符合以下不等式：

$$12+k_{n+1}>A\geqslant 0$$

如此，则根据 A 的数值可以得知星始见所在的月份。即，$A=0$，星始见于天正之月；$A=1$，星始见于夏历十二月；$A=2$，星始见于夏历正月……不过，要注意的是，如果星始见所在之年为有闰之年，设闰月为夏历第 r 月，如，闰五月，则 r 为6；闰六月，则 r 为7，等等。在这种情况下，如又有 $A-2\geqslant r$，则命 $A-2-r=A'$。当 $A'=0$，即星始见于闰月；$A'=1$，星始见于闰月后之第1个月，如此等等。

4. 推至日[①]

这一项计算从题目看，应是推求所求星始见之年的起始冬至日。但实际上从术文可知，所推算的乃是星始见所在中气的交气

① “至”应为“中”之误。

日名和时刻。

前述第2项计算过程中所得的中元余 $z_{元}$ 乃从所求星始见所在之元的元首起到星始见所在之气的全部中气数。

又，据前文统母篇中数据定义得知：1中气的时间长度为$\frac{中法}{元法}=\frac{140530}{4617}=30\frac{2020}{4617}$，其单位为日。故

$$\frac{中法\times z_{元}}{元法}=积日+\frac{小余}{元法}$$

此为从元首起到所求星始见之气首的全部时间长度，其单位为日。因元首日为甲子，故以60除积日数，其余数按六十干支排列，以甲子为0，即可得所求星始见所在之气的气首日名。用数学式表达可写成：

$$q=[积日/60]_R$$

q 即为以甲子日为0的干支日名。

据《汉书·律历志下》所载，这一项的计算本是为冬至日名。而原术文中最后重申，所求得的 q，"则冬至也"。钱大昕、李锐两位大家都认为，按上述术文推算步骤，所得实为"星见前交中气日"（钱大昕语）或"此推星所见中日"（李锐语）。两人都认为《汉书·律历志下》所载术文称之为冬至日，不过是"举冬至为例"。然而，举冬至为例和求冬至日名是非常不同的两回事。按《汉书·律历志下》术文布算，的确钱、李两人断所求为"星见前交中气日"或"星所见中日"的断语是不错的。其所得的结果也是一个非常确定的中气，然而绝非是一连串中气而可以冬至为例的。对照下面一项计算是推星始见所在之月的"朔日"，可以推知本项计算应为推算星始见所在的中气的首日和时刻。故《汉书》所记的术文有误。"推至日"应为"推中日"之误；而这段术文之末的"则冬至也"当为"则中日也"之误。

5. 推朔日

这是推求星始见所在之月的朔日。

从元首到星见之月的全部月数为月元余。

$$月元余\times\frac{2392}{81}=从元首到星见之月朔日的全部日数和时刻$$

即,

$$月元余\times\frac{2392}{81}=积日+\frac{小余}{81}$$

再推,

$$c=[积日/60]_R$$

c 即为所推朔日的干支日名,当然,仍以甲子日为 0。

6. 推入中、次日、度数

这是推求星见之时在中气之后的日数和入次之后的度数。

从前面第 2 项和第 4 项的推算中得知,从星始见所入的中气到星始见这段时间是:$\frac{中余}{见中法}$,其单位为 1 个中气的时间。这段时间如以日为单位,则为$\frac{中法\ 140530}{元法\ 4617}=30\ \frac{2020}{4617}$日。故从星始见所入的中气到星始见的时间长度(以日为单位)为:

$$\frac{中余\times中法}{见中法\times元法}=\frac{中余\times中法}{见中日法}$$

又,星始见所在中气的气始离该日的夜半的时间长度为第 4 项计算中所得的小余/元法。此数可以化成:

$$\frac{小余\times见中法}{元法\times见中法}=\frac{小余\times见中法}{见中日法}$$

所以,星始见离所在中气气始之日的夜半的时间长度总共为:

$$\frac{中余\times中法}{见中日法}+\frac{小余\times见中法}{见中日法}$$

$$=\frac{中余\times中法+小余\times见中法}{见中日法}$$

$$=Q+\frac{Q'}{见中日法}$$

上述算得的数中，其整数部分 Q 就是从中气所在日算外的日数，即，$Q=0$，则星始见就在中气气始所在之日；$Q=1$，星始见在气始所在之日的次日，如此等等。对星始见所入十二次度数而言，也是相仿。即，$Q=0$，则星始见就在中气气始所在之十二次度数内；$Q=1$，星始见在气始所在之度的下一度内，如此等等。至于 $\frac{Q'}{见中日法}$ 则代表着日或度以下的余数。

7. 推入月日数

这是推星始见于某月中的日数和日以下的余数。其算法大体与上项算法相似。从朔日夜半到星始见的时间总长度为：

$$\frac{月余}{见月法}\times\frac{月法}{81}+\frac{小余}{81}\times\frac{见月法}{见月法}$$

$$=\frac{月余\times月法}{见月日法}+\frac{小余\times见月法}{见月日法}$$

$$=\frac{月余\times月法+小余\times见中法}{见月日法}$$

$$=L+\frac{L'}{见月日法}$$

其中整数部分 L 就是星始见所入之月的朔日以来的整日数。$L=0$，星始见在朔日；$L=1$，星始见在朔日之次日。$\frac{L'}{见月日法}$ 为小数部分，即，从星始见之日的夜半到星始见的总时刻。

至于在术文中又提出，把 L 加上朔日的大余，那就是求星见之日的干支日名了。

8. 推后见中

这是推下一次星始见所在的中气。

在纪母篇中已求得每个行星都有自己的一见时间长度，它的单位是1中气。其整数部分称为积中，其余数部分称为$\frac{中余}{见中法}$。根据上述第2项的推算，已求出上一星始见的自元首以来的中气个数——中元余，和余数——中余。故下一次星始见可以将中元余＋积中①，得中气的整数个数，又将$\frac{中余+中余}{见中法}$，得余数。式中前1中余和后1中余的含义全然不同。前1中余是指1见中所含中气的余数，即纪母篇中的中余。后1中余是指从上元起到上一星始见的中气个数的余数。不清楚为什么《汉书・律历志下》所记术文中会出现用同一个专门术语来称呼实质不同的两个概念。鉴于用语上的混乱，我们认为，在纪母篇中的积中、中余可以改称为见中、见中余。

与之相仿，我们把纪母篇中的积月和月余也可改称见月、见月余。这一点在下面再谈。

且说下一星始见的中气余数为$\frac{见中余+中余}{见中法}$。如果见中余＋中余＞见中法，则此余数可定为(见中余＋中余)－见中法；此时，则在自元首以来的整中气个数中增加1。

得到下一次星始见的整中气数和中气余数之后，即可按照第4项的推算，求该次星始见所在的中日和小余；按照第6项的推算，求该次星始见距所在的中气之后的日数和入次之后的度数。

9. 推后见月

这是推下一次星始见所在之月，其方法的原理大致与上项计算相同。

纪母篇中已给出1见(即行星的一个会合周期)所包含的整

① 按下文的建议，中元余＋积中当改为中元余＋见中。

月数(积月,我们建议改称见月)和月的余数(月余,我们建议改称见月余)。以上述第3项推算得到的月元余,加上见月,得到自元首以来到下次星始见之间所包含的整月数。又以第3项推算中得到的月以下的余数$\frac{月中余}{见月法}$,加上$\frac{见月余}{见月法}$,得到自元首到下次星始见之间所包含的整月数之外的余数。不过要注意的是,如果$\frac{月中余+见月余}{见月法}\geqslant 1$,则当取$\frac{月中余+见月余-见月法}{见月法}$为余数,同时在上面求出的整月数上再加上1。

得到确切的整月数后,可以仿照上述第3项推算,求出下次星始见所在之月的月名。

又可仿照上述第5项推算,求得下次星始见所在之月的朔日;仿照上述第7项的推算,求出下次星始见所入月份中的日数。

10. 推晨见、夕见

上述9项推算是对外行星而言的,它们只有晨始见。而对金、水这两颗内行星而言,尚有晨始见和夕始见之分。当然,我们也可以只考虑晨始见,则完全和外行星的上述9项算法一样,可以得到各项所需要的数据。得到这些晨始见的数据之后,再求夕始见,就可以仿照上述第8、9两项的推算原理,把纪母篇中所给的数据(晨中分、积中、中余;夕中分、积中、中余;晨闰分、积月、月余;夕闰分、积月、月余。但也应根据我们前述的建议,将积中、中余改为复中、复中余;积月、月余改为复月、复中余,并再在前面增加“晨”字或“夕”字)里的夕复中,夕复中余及夕复月、夕复月余,取代第8、第9项推算中的见中、见中余及见月、见月余的地位,由此可以得到夕始见时的相应数据。再求下一次晨始见时,则可从此夕始见算起。故在《汉书·律历志下》所记述文中称之为:“晨见加夕,夕见加晨。皆如上法”。

11. 推五步

这是推求自星始见之后的某个时刻星所在宿度。

前面已经推出星始见时行星所在的宿度(见上面第6项推算),在五步篇中又已给出了行星在一个会合周期中的动态表。动态表里给出了行星在某一动态下所逗留的时间总长度以及该动态下行星运动的每日所行的度数。因此,本项推算本是件很简单的事。先求出所要推求行星宿度的时刻是处在该星动态表中的哪一段。在这一段之前的全部时间数和星所行度数可从该星动态表中逐段相加而得。在这一段中的行度数则可将星在该段中的时间数(从星在该段之初的时刻到欲推求位置的时刻这一段时间的总长度)乘以星在该段中的运动速度,即得星在该段中所行的度数。将所求得之数和前面各段所行之度数相加,就得自星始见以来到所推求时刻的星的全部行度数。将之与上面第6项推算所求出的星所入的十二次度数相加,然后按照下文给出的十二次所在宿度表和二十八宿度数表,就可以得知在给定的时刻该星在十二次中的位置,或二十八宿中的位置。

在《汉书·律历志下》给出的术文中未介绍上述我们所说的算法,而只是介绍了二个分母不同的分数在相乘时的运算方法。也许刘歆或班固认为我们上述的算法,对于一个古代读者来说,不言而喻地是应该掌握了的,故在术文中就不必多加叙述了。

(六)岁术

所谓岁术,本是讨论岁星纪年或太岁纪年问题。但本篇实际上包含了许多与之相关的知识及推算项目,因此本篇的内容相对上述各篇而言,显得既复杂,又丰富。清代钱大昕曾经想把这篇分割成二篇乃至二篇以上,但终究未能成功。事实上,既然这一篇中种种繁杂的内容是相互联系的,则似乎也没有必要将之割

裂。我们即以此为据，逐项叙述如下：

1. 推岁所在

所谓岁星纪年，实际是以岁星所在的十二次次名来纪年。要求某一年的岁星年名，实即求该年岁星所在的十二次次名。

天文学发展到刘歆的时代已有很大的进步。早就发现木星的恒星周期不及12年，故12年之后木星要比原来的恒星位置更往前了一点。这种现象当时就称之为木星超辰。在三统历中则认为，经过144年，木星超辰1次，也即，木星在144年中，在天上走了145次。过1728年，木星超辰满整整一周（$144\times12=1728$）。因此，术文给出岁星所在十二次位置的方法如下：

设从太极上元到所求年的年数为S，则有

$$s_{木}=[S/1728]_R$$

$$\frac{s_{木}\times145}{144}=积次+\frac{次余}{144}$$

积次为上式中允许的最大整数，次余为小于144的正数。设积次为J_c，可求得$J_c\equiv[d_c/12]_R$。d_c在术文中称为定次。$d_c=0$，为木星在星纪次；$d_c=1$，木星在玄枵次；等等。

又，术文中还给出了求太岁所在的方法。但从《汉书·律历志下》中所给术文看来，实际就是该年的干支年名。虽然在太初历中已可见到干支纪年的端倪，但其太岁纪年仍然只有十二支的名称，而不使用六十干支名称，六十干支纪年的使用年代尚是个未能确认的问题。《汉书·律历志下》所记表明六十干支纪年至晚已行用于刘歆的时代。至少其算法则是根据上文求出的J_c，求得

$$g=[J_c/60]_R$$

g即为太岁年名，或六十干支年名。不过它不是从甲子起，而是从丙子起的，即$g=0$时，年名为丙子；$g=1$时，年名为丁丑，如此等等。

2. 赢缩

中华书局标点本《汉书·律历志下》在推岁所在项之后给出

了一段文字，标题称为“赢缩”。但细检这一段全文，绝大部分与历法问题无关。今把这一段文字抄录于下：

> 赢缩。《(左)传》曰：“岁弃其次而旅于明年之次，以害鸟帑，周、楚恶之。”五星之赢缩不是过也。过次者殃大，过舍者灾小，不过者亡咎。次度。六物者岁时日月星辰也。辰者，日月之会而建所指也。

可以看出，这一段文字的前半段，实际是讲星占学，与历法推算是没有关系的，所引《左传》的话是在襄公二十八年章内“春，无冰”条下所记郑国星占家裨灶的话。至于接着的一段“五星之赢缩不是过也。过次者殃大……”云云则是后世星占家的发挥。整个这前半段对于历法来说，乃是一种添加。这种添加有两种可能：

其一，这是刘歆本人所加。由此则可以推知，它当是班固删削之余，而《三统历》原文则这一类与《左传》、星占之类有关的话语当不在少数。不过这种可能性应当说比较小。因为班固是我国历史上著名的文字家和史学家，继其遗志，完成《汉书》全书的班昭和马续也都是我国学术史上的佼佼者，像这种明显的文字上的不协调问题，会逃过三位大家的法眼，实有点不可想象。

其二，则是某个传抄者无意中把一些无关的东西阴错阳差地篡入了《三统历》术文中，所以才会出现这种不协调。这种可能性在我们考查全段文字之下半段时更显得突出。

下半段说了三件事。第一是“次度”两个字，孤零零地，在本段中无可呼应。第二是解释何为六物。六物之名不仅不出现于本段，而且也不见于三统历术文本身之中。第三是解释何谓“辰”，但辰的概念也未出现在本段之中。因此，总的看来，本段之下半段是杂乱无章的。

总之，按我们鄙见，本段绝大部分都应删去。只剩下“次度”两字。它应当是下文两份表格的标题。

3. 次度

这一项里包含了两份表，一份是十二次表（表 4—4），一份是二十八宿宿度表（表 4—5）。在前面多项求日、月、五星的位置时经常要用到这两份表。故三统历中必须具体地给出它们。

从上述这两份表中可以看出，所谓十二次，是将一周天均匀地分成 12 段。12 个节气为这相应 12 段的起始点；而 12 个中气，则为相应段的中央点。这 12 个起始点和 12 个中央点，只要根据天文观测确定 1 个点的位置之后，就可以藉助于二十八宿度数表求得其他 23 个点的位置。一般来说，上述 24 个点中经过实测确定的是冬至点。中国天文学史上留下了许多个不同年代里的冬至点位置。由于岁差的原因，冬至点在星空中的位置是在不断变化的。而历代留下的冬至点位置观测值正成为后来东晋天文学家虞喜发现岁差的主要依据。

二十八宿度数所给出的实际上是从本宿距星到下宿距星之间的赤经差。中国古代测量天体的赤道位置，赤经方面都用的是相对差值，即，所给出的天体赤经数据往往是入××宿若干度。这意思也就是该天体和××宿距星的赤经差为若干度。因此，有了二十八宿度数表以后，还必须知道二十八宿中每一宿的距星。但这份距星表却从未在中国历代的历法著作中出现过。也许，在古人看来，这乃是一个众所周知的最简单明白的事实。然而，传承到现代，这 28 个距星究竟是哪 28 个星，已经成了必须经研究后方能得知的问题。今根据以往的研究①，列出汉代所用二十八

① 中国天文学史整理研究小组：《中国天文学史》，科学出版社，1981 年，第 70 页。不过要注意的是该书中对双星的子星符号写为右上角角标，今改为现代通行的右下角角标。如尾距星原书写为 μ'Sco，今改为 μ_1Sco。

宿距星的现代国际通行名称(见表 4—6),以便读者参考。

表 4—4　十二次中气星度表

次名	次初	星度 节气	次中	星度 中气	次末	星度[①]
星纪	斗	十二度 大雪	牵牛	初度 冬至	婺女	七度
玄枵	婺女	八度 小寒	危	初度 大寒	危	十五度
娵訾	危	十六度 立春	营室	十四度 惊蛰	奎	四度
降娄	奎	五度 雨水	娄	四度 春分	胃	六度
大梁	胃	七度 谷雨	昴	八度 清明	毕	十一度
实沈	毕	十二度 立夏	井	初度 小满	井	十五度
鹑首	井	十六度 芒种	井	三十一度 夏至	柳	八度
鹑火	柳	九度 小暑	张	三度 大暑	张	十七度
鹑尾	张	十八度 立秋	翼	十五度 处暑	轸	十一度
寿星	轸	十二度 白露	角	十度 秋分	氐	四度
大火	氐	十五度 寒露	房	五度 霜降	尾	九度
析木	尾	十度 立冬	箕	七度 小雪	斗	十一度

注:古人对度数的概念和今人不同。今人称婺女七度乃是指一个点。而古人之称包含了一个区间。即从婺女七度的开始到七度的结束,即八度之前,这整个一度都称为婺女七度。正因为如此,在上表中上一次之末和下一次之初总是差一度。但实际上两者仍然是连续的。

一些《天文年历》和星表中载有这些星的某个历元下的赤经、赤纬,以及计算这些数据的短期和长期变动的方法及公式,读者可以得到。

表 4—5　二十八宿度数表

角　十二[①]	亢　九	氐　十五	房　五	心　五
尾　十八	箕　十一		东	七十五度[②]
斗　二十六	牛　八	女　十二	虚　十	危　十七
营室　十六	壁　九		北	九十八度
奎　十六	娄　十二	胃　十四	昴　十一	毕　十六
觜　二	参　九		西	八十度
井　三十三	鬼　四	柳　十五	星　七	张　十八
翼　十八	轸　十七		南	百一十二度

注:①单位为度。下同。原文中“度”字省略。

②古代将二十八宿分为四象或四官。每象七宿。角、亢、氐、房、心、尾、箕七宿古称为东官,苍龙之象;下面,斗、牛、女、虚、危、营室、壁七宿为北宫,玄武之象;奎、娄、胃、昴、毕、觜、参七宿为西官,白虎之象;井、鬼、柳、星、张、翼、轸七宿为南宫,朱鸟之象。

表 4—6　汉代所用二十八宿距星表

宿名距星今用名	宿名距星今用名	宿名距星今用名	宿名距星今用名
角 αVir	斗 φSgr	奎 ζAnd	东井 μGem
亢 κVir	牵牛 βCap	娄 βAri	鬼 θCnc
氐 αLib	婺女 εAqr	胃 35Ari	柳 σHya
房 πSco	虚 βAqr	昴 17Tau	七星 αHya
心 σSco	危 αAqr	毕 εTau	张 ν_1 Hya
尾 μ_1 Sco	营室 αPeg	觜 φ_1 Ori	翼 αCrt
箕 γSgr	壁 γPeg	参 δOri	轸 γCrv

4. 章首日名

本项给出了一份一元三统之内各个章章首日名表。在表前有一段文字,这段文字虽说与下文之章首日名表不无关系,但总的说,关系并不紧密,甚至可以说,把这段文字删去也无影响,但它却有一点意外的讯息,故我们还是把这段文字引述如下,请读者明鉴。

九章岁为百七十一岁，而九道小终。九终千五百三十九岁而大终。三终而与元终。进退于牵牛之前四度五分。九会，阳以九终，故日有九道。阴兼而成之，故月在十九道。阳名成功，故九会而终。四营而成《易》，故四岁中余一，四章而朔余一，为篇首。八十一章而终一统。

1 大终 1539 年是 81 章，即 9 个 9 章。故可以把 9 章作为 1 小终。又，3 大终就是 4617 年，是为 1 元。故称“三终而与元终”。但值得注意的是接着的一句：“进退于牵牛之前四度五分”。我们前面已经看到，在“推合晨所在星”项里，认为在元首时刻，乃至统首时刻，日月所在位置为牵牛初度。此处却说，一元之后日月的位置大约在牵牛之前四度五分。这意味着这一段话的写作者对冬至点在星空中的位置的认识和“推合晨所在星”术文的观点是不一样的。天文学告诉我们，地球自转轴会绕着地球公转的黄极轴做缓慢的运动。这种运动的结果就是天上赤道（地球自转轨道平面和天球相交，割出的大圆）和黄道（地球绕日公转的轨道平面和天球相交，割出的大圆，也可以视之为太阳在天球上运动的轨道）相交的交点（即春分点和秋分点）会沿着黄道做缓慢的自东向西的运动。这种现象天文学上称之为岁差。由于岁差的关系，冬、夏至点在星空间的位置也在做缓慢的从东向西运动。冬至点在牵牛初度的数据大约是春秋末期、战国初年时的数据。到了太初改历的时代，冬至点已移到大约斗 21 度的地方。或者用上述引文中的话，到了牛前四度五分的地方。而从太初改历到刘歆作三统历又经过 100 年左右。因此，上述引文表明了几点。第一，这是太初历的数据，而不是三统历的。其二，刘歆尚未认识到岁差的现象和规律。他为了说《春秋》，不得不引用春秋时期的冬至

点位置。但他不可能否定冬至点位置已较春秋时代有变化的现象，故在此透露了一句，一元之后冬至点在牵牛之前四度五分左右。

上述引文的中间一段是讨论九会问题。

在统母篇中已提到一会月为 6345 个朔望月。以章月 235 去除，得一会月共 27 章。1 章 19 年。故一个会月相当于 $27\times19=513$ 年。9 会就是 $513\times9=4617$ 年，即 1 元之年。此所以上述引文中会说“九会而终”。

至于说到“日有九道”，“月有十九道”，其源盖出阴阳家的神秘说法。所谓“阳以九终”，即阳数以 9 为最大(在 1、3、5、7、9 这五个阳数中而言)。“阴兼而成之”，即指以阳数最末一个 9 和阴数最末一个 10，两者相加得 19，故称“月有十九道”。总之，这些都是牵强附会的说法，我们不必多加考虑。

上述引文的最后几句，勉强可以说和下面的表有关。

“四营而成《易》”[①]被附会来解释“四岁中余一”的原因。其实，一年 $365\frac{385}{1539}$ 日 $>365\frac{1}{4}$ 日。故四年之后小余(即指年长度的余数部分)的积累为：$\frac{385}{1539}\times4=\frac{1540}{1539}=1\frac{1}{1539}$ 日。这就是“四岁中余一”的真正含义。可见，“四岁中余一”是个客观必然的事实，与《易》全不相干。

四章的朔余为 $4\times235\times\frac{43}{81}=\frac{40420}{81}=499\frac{1}{81}$。这就是四章而

---

① 此句原本出自《易·系辞上》，作：“是故四营而成《易》，十有八变而成卦。”讲的是以蓍草求卦占卜时的一些方法。《易》在占卜时用 49 根蓍草，按一定的规则数蓍草，数时 4 根 4 根一数，故称之为“四营而成《易》”。要操作三遍，才得一个数，奇数为阳爻，偶数为阴爻。一卦有 6 爻。故要操作 18 遍，成一卦。此即所谓“十有八变而成卦”。这四营和十有八变都是人为规定，本无神秘的含义。刘歆以“四营而成《易》”作为“四岁中余一”的根据，其意图是增加其历法的神秘性。

朔余一的来历。刘歆也把它归入“四营而成《易》”的反映，这除了使后人感到刘歆牵强附会之能以外，其实什么也说明不了。

在上述似乎有所多余的那段文字之后，三统历给出了一份章首日名表。所给的是每一统的各章首日的干支日名。由于原表排列不科学，使初学者乍一看觉得茫无头绪，不知怎么回事，今根据原表之意，改变成表 4—7 的形式，以飨读者。

5. 推章首朔日、冬至日

所谓章首朔日，是冬至和朔日发生在同一日的同一时刻。故章首朔日即冬至日。

$$1\text{ 朔望月}=29\frac{43}{81}\text{日}$$

$$1\text{ 章}=235\text{ 朔望月}=235\times\frac{2392}{81}=\frac{562120}{81}\text{日}=6939\frac{61}{81}\text{日}$$

$$39=[6939/60]_R$$

这就是三统历术文中说的“各从其统首起，求其后章，常加大余三十九，小余六十一”诸数的由来。至于加上诸数后，如大余超过60，就去掉 60；小余超过 81 则减去 81，并在大余上加 1。这是古历计算中的常规步骤，术文中只说“数除如法”。

表 4—7　三统章首日名表

统＼章	一章	二章	三章	四章	五章	六章	七章	八章	九章
一统	甲子	癸卯	癸未	癸亥	癸卯	壬午	壬戌	壬寅	壬午
二统	甲辰	癸未	癸亥	癸卯	癸未	壬戌	壬寅	壬午	壬戌
三统	甲申	癸亥	癸卯	癸未	癸亥	壬寅	壬午	壬戌	壬寅
统＼章	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八
一统	辛酉	辛丑	辛巳	辛酉	庚子	庚辰	庚申	庚子	己卯
二统	辛丑	辛巳	辛酉	辛丑	庚辰	庚申	庚子	庚辰	己未
三统	辛巳	辛酉	辛丑	辛巳	庚申	庚子	庚辰	庚申	己亥

续表

章 统	十九	二十	二十一	二十二	二十三	二十四	二十五	二十六	二十七
一统	己未	己亥	己卯	戊午	戊戌	戊寅	戊午	丁酉	丁丑
二统	己亥	己卯	己未	戊戌	戊寅	戊午	戊戌	丁丑	丁巳
三统	己卯	己未	己亥	戊寅	戊午	戊戌	戊寅	丁巳	丁酉
章 统	二十八	二十九	三十	三十一	三十二	三十三	三十四	三十五	三十六
一统	丁巳	丁酉	丙子	丙辰	丙申	丙子	乙卯	乙未	乙亥
二统	丁酉	丁丑	丙辰	丙申	丙子	丙辰	乙未	乙亥	乙卯
三统	丁丑	丁巳	丙申	丙子	丙辰	丙申	乙亥	乙卯	乙未
章 统	三十七	三十八	三十九	四十	四十一	四十二	四十三	四十四	四十五
一统	乙卯	甲午	甲戌	甲寅	甲午	癸酉	癸丑	癸巳	癸酉
二统	乙未	甲戌	甲寅	甲午	甲戌	癸丑	癸巳	癸酉	癸丑
三统	乙亥	甲寅	甲午	甲戌	甲寅	癸巳	癸酉	癸丑	癸巳
章 统	四十六	四十七	四十八	四十九	五十	五十一	五十二	五十三	五十四
一统	壬子	壬辰	壬申	壬子	辛卯	辛未	辛亥	辛卯	庚午
二统	壬辰	壬申	壬子	壬辰	辛未	辛亥	辛卯	辛未	庚戌
三统	壬申	壬子	壬辰	壬申	辛亥	辛卯	辛未	辛亥	庚寅
章 统	五十五	五十六	五十七	五十八	五十九	六十	六十一	六十二	六十三
一统	庚戌	戊寅	庚午①	己酉	己丑	己巳	己酉	戊子	戊辰
二统	庚寅	庚午	庚戌	己丑	己巳	己酉	己丑	戊辰	戊申
三统	庚午	庚戌	庚寅	己巳	己酉	己丑	己巳	戊申	戊子
章 统	六十四	六十五	六十六	六十七	六十八	六十九	七十	七十一	七十二
一统	戊申	戊子	丁卯	丁未	丁亥	丁卯	丙午	丙戌	丙寅
二统	戊子	戊辰	丁未	丁亥	丁卯	丁未	丙戌	丙寅	丙午
三统	戊辰	戊申	丁亥	丁卯	丁未	丁亥	丙寅	丙午	丙戌
章 统	七十三	七十四	七十五	七十六	七十七	七十八	七十九	八十	八十一
一统	丙午	乙酉	乙丑	乙巳	乙酉	甲子	甲辰	甲申	甲子
二统	丙戌	乙丑	乙巳	乙酉	乙丑	甲辰	甲申	甲子	甲辰
三统	丙寅	乙巳	乙酉	乙丑	乙巳	甲申	甲子	甲辰	甲申

①《汉书》原文作“庚子”，误。

6. 推篇首和周至

所谓篇首即是上述第 4 项推算中所引到的："四章而朔余一，为篇首。"

$$1\text{篇}=4\text{章}=4\times235\times29\frac{43}{81}=27759\frac{1}{81}\text{日}$$

$$39=[27759/60]_R$$

故术文中说："推篇，大余亦如之（即，也是加三十九），小余加一。"

所谓周至，据统母篇数据知为 57，即三章。故

$$1\text{周至}=3\times235\times29\frac{43}{81}=20819\frac{21}{81}\text{日}$$

$$59=[20819/60]_R$$

故术文中说："求周至，加大余五十九，小余二十一。"不言而喻，对所得数据也要"数除如法"。

三、三统历《世经》

在《汉书·律历志上》中班固说到，刘歆作《三统历》及《(三统历)谱》。在《汉书·律历志下》中却未见此《谱》，而是见到一篇题为《世经》的文字。这篇《世经》的内容性质与"历谱"一致，即记载历代帝王登位、王朝兴亡等重大事件的年代。但《世经》中的内容说到西汉灭亡之后直到东汉光武帝在位的年数，这几十年的历史大部分发生在刘歆死后。故历来学者都认为系班固所增入，而非刘歆本文。至于此前部分，与《三统历谱》究竟是否有别，差别多大，则都已无可考校。在此，我们只好就前人之说，即不去怀疑王莽居摄盗位之前的文字乃刘歆所作。

《世经》乃是刘歆对古史归纳而成的一份年谱。从古史年代学的角度来考虑，因为上古史料零乱，越往古，王朝的年代越难断定。例如关于周武王伐纣的年代，历代研究提出的年份，至少有

数十家。其中，刘歆所说，也算一家。这或许可以说是《世经》的第一个史学价值。

但其实，也许《世经》更重要的是它的第二个史学价值：提供了三统历上元的具体数据。我们遍阅《三统历》的序言和术文，均未找到三统历上元的具体年份。这样，三统历的推算实际上是无法进行的。只有从《世经》中得知了三统历太极上元距某个确切年代的总年数，才能进行三统历的各项过去和未来的推算。这个确切的数据首推"汉历太初元年，距上元十四万三千一百二十七岁"。

仔细分析一下三统历的上元，是件有意思的事。

三统历定 1728 年岁星超辰 12 次。则得 8640 年超 60 次。

$$4887=[143127/8640]_R$$

$$4887=2\times1728+1431$$

$$1431=9\times144+33$$

故 143127 年内岁星超辰 $24\times2+9=33$ 次。又，

$$27=[143127/60]_R$$

故太初元年的年名应为 $27+33=60$，即和太极上元的年名一致。

我们记得，《汉书·律历志上》记述太初历改历过程时曾说到：

> 乃以前历上元泰初四千六百一十七岁，至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁。

我们前已指出，这一段本是邓平等人的话，被误记到公孙卿等人的头上了。邓平以焉逢摄提格之岁为上元；到元封七年，又是焉逢摄提格之岁。太初历的上元又是"前历上元泰初四千六百一十七岁"。

这不由得使我们大胆地提出猜想:《世经》中所说的太极上元,实际就是太初历的上元;而刘歆的岁星超辰思想和算法也可能就是公孙卿、壶遂、司马迁等人的遗术。

第三节 太初历和三统历的不同点

三统历的许多基本数据和太初历的相同。太初历的术文没有流传下来,但料想绝大部分也会与三统历的相同。因此,自古以来人们似乎都不怀疑此两历是否会有什么差别。只不过因为《汉书·律历志》留下的是三统历,故人们只讨论三统历而已。要说太初历,人们也常会以三统历的数术答之。

仔细推敲一下,上述观点的一个自然推论就是,刘歆在天文学上没有什么新的建树。他的工作最多就是那篇《世经》,而这只是一种年代学著作。或者还可以推论说,从太初年间到刘歆时代约 100 年间,天文学没有多大进步。然而,历来人们都承认刘歆是一位著名的天文学家,三统历是中国历法史上一部重要的历法。现在又探得许多迹象,表明在太初历颁行以后的 100 年间,天文学是在不断进步的。这些都和太初历即三统历的观点难以相容。

因此,我们总以为,三统历和太初历相比,从天文学上来说应该是有不同的。由于历史资料的缺乏,要探查这个问题,困难确实很大。鉴于这个问题在中国天文学史上有一定的意义,所以我们下了一番试探的工夫。

一、二十八宿体系

《汉书·天文志》上有一段关于岁星纪年的文字。其中列举出在各个年份按石氏、甘氏和太初历的记载,岁星所在的位置。这些位置都是利用二十八宿作为标志来标示的。其中太初历所

使用的二十八宿体系和三统历所载有明显的不同。今把太初历、三统历及石氏、甘氏的二十八宿体系列于表4—8。

表4—8　太初历、三统历、石氏、甘氏二十八宿对照表

太初历	角	亢	氐	房	心	尾	箕	建	星	牵	牛	婺	女	虚	危	营	室	东	壁
三统历	角	亢	氐	房	心	尾	箕		斗		牛		女	虚	危	营	室		壁
石　氏	角	亢	氐	房	心	尾	箕		斗	牵	牛	婺	女	虚	危	营	室	东	壁
甘　氏	角	亢	氐	房	心	尾	箕	建	星	牵	牛	婺	女	虚	危	营	室	东	壁
太初历	奎	娄	胃	昴	毕		参	罚	东	井	舆	鬼	注		张	七	星	翼	轸
三统历	奎	娄	胃	昴	毕	觜		参		井		鬼	柳		星		张	翼	轸
石　氏	奎	娄	胃	昴	毕	觜	觿	参	东	井	舆	鬼	柳	七	星		张	翼	轸
甘　氏	奎	娄	胃	昴	毕		参	罚		狼		弧	注		张	七	星	翼	轸

从表4—8中可以看出，三统历的二十八宿体系和石氏体系全同。而太初历则绝大部分和甘氏体系相同。具体地说，太初历用甘氏体系的建星，而三统历则用石氏体系的斗。太初历用甘氏的注、张、七星，三统历用石氏的柳、七星、张。太初历用甘氏的参、罚，三统历用石氏的觜、参。太初历和甘氏体系唯一不同的是，太初历不采用甘氏的狼、弧，而改用石氏的东井、舆鬼。东井、舆鬼离黄道较近，而狼、弧则离黄道较远，太初历对甘氏的调整是有理由的。

既然太初历的二十八宿体系和三统历的不同，可见历来以为三统历中的二十八宿距度数据系落下闳所测的看法是完全错了。其实，三统历的数据是另有根源的。它与《淮南子·天文训》所列完全相同，除了周天度数的尾数及其分配宿这一点例外①。总的

---

① 《淮南子·天文训》的尾数为$\frac{1}{4}$度，分配在箕宿。三统历的尾数及其分配宿在今本《汉书·律历志下》中夺落。但根据三统历回归年长度可知，周天度数的尾数应为$\frac{385}{1539}$度。不过，它与$\frac{1}{4}$度几乎相等，在古代测量误差范围内，这两个尾数的差别可以忽略。至于三统历尾数的分配宿，据《元史·历志一》记载应在斗宿。

说来，三统历的二十八宿距度数据应当传承自古代。

至于太初历，则根据《汉书·律历志上》的记载可以肯定，当年是测过二十八宿距度的，但它的数据究竟如何，却已完全失传而无可考了。

二、历元与上元

太初历以太初元年前十一月甲子夜半朔旦冬至为历元。上面我们也已做出推测，太初历有个上元，距太初元年143127年。无论我们推测得对还是不对，但三统历是以此为上元的。看来，在这个问题上，两历并无不同。

然而，这就出现了一个问题。我们在讨论《三统历》的序言时已经提到，三统历中有个庞大的周期，并称："三统，二千三百六十三万九千四十，而复于太极上元。"这么庞大的一个太极上元数字怎么在术文和《世经》中均不见影踪？通常理解"复于太极上元"一语，应是指太极上元在前，过了多少年之后又回复到前面太极上元的状态。因此，如果太初元年之前的143127年就已经是太极上元了，那么，数达两千多万那么庞大的年数作为太极上元，就实在是多余的了。除非刘歆以此来炫耀自己数字运算能力之奇。但刘歆作为一个具有数字神秘主义思想的天文学家，他所想炫耀的并不在乎自己的运算能力，而是在于他所得到的数据，其来源之神。从这一点来讲，他得到的数达两千多万年的太极上元才是他所关注的。

总之，三统历的太极上元问题仍是个需要深入探讨的问题。

三、朔望月和回归年

朔望月和回归年是古代历法的两个基本数据。太初历和三统历的这两个数据是完全一致的，自古从无疑义。

然而,《续汉书·律历志中》内记了一段东汉顺帝汉安二年(143)尚书侍郎边韶上书建议改历时的一段话:

> 刘歆研机极深,验之《春秋》,参以《易》道,以《河图帝览嬉》、《洛书乾曜度》推广九道,百七十一岁进退六十三分,百四十四岁一超次,与天相应,少有阙谬。

"百四十四岁一超次"之说是指岁星超辰之事。这事我们已在上面论及,在此可不论。

边韶还提到,刘歆推广九道,并求得了"百七十一岁进退六十三分"的结果。这又是什么意思呢?

我们知道,太初历定一朔望月$=29\frac{43}{81}$日,由于使用19年7闰的规律,因而可求得一回归年$=365\frac{385}{1539}$日。

刘歆在三统历里也使用了这些数据,并在这些数据的基础上发展了太初历的数字神秘主义思想,建立了一整套关于天文数字的复杂而又神秘的数学关系,这些关系既和乐律有关,也和《易经》上的数字有关。

然而,太初历的朔望月和回归年的数值都太大。除了太初历历元本身的测定已包含有后天的误差外,过大的朔望月和回归年数值进一步加强了太初历后天的趋势。这一点,到刘歆时代已有人在探索。

上引边韶的话,说的就是刘歆对太初历天文数据进行修订的事。其中所谓"百七十一岁进退六十三分",指的就是:按太初历的朔望月数值,积累171岁后,应从中减去63分。或者也可以说,19年应减去7分。

按太初历,一个月的分数为:

$$29\times 81+43=2392$$

19 年有 235 个朔望月（$19\times 12+7=235$），总分数为：

$$2392\times 235=562120$$

减去 7 分则为 562113。也就是说，刘歆认为一个朔望月的精确值应为：

$$\frac{562113}{235\times 81}=29.530496\ \text{日}$$

而太初历则为：

$$\frac{562120}{235\times 81}=29.530864\ \text{日}$$

按近代理论推算，汉代朔望月数值应为 29.530585 日。显然，刘歆的值的确比太初历的要来得精密。

既然朔望月减小了，在 19 年 7 闰这个闰周不变的条件下，回归年自然也要相应地减小。

$$\text{太初历 1 回归年}=365\frac{385}{1539}=\frac{562120}{1539}=365.2502\ \text{日}$$

$$\text{刘歆定 1 回归年}=\frac{562113}{235\times 81}\times\frac{235}{19}=\frac{562113}{1539}=365.2456\ \text{日}$$

按近代理论推算，汉代的回归年值应为 365.2423 日。可见，刘歆的值也比太初历要精密。

虽然刘歆发现了比太初历更精密的朔望月和回归年数值，但他却并未在历法计算中正式使用，而只是在《三统历》本文“岁术”篇二十八宿距度表之后的一段文字中注了一句极含糊的话：“九章岁为百七十一岁，而九道小终。”这句话的意思是指从历元时刻开始，经过 9 章＝$9\times 19=171$ 岁之后，冬至又和合朔相会在同一天的夜半（因为过 171 年，回归年和朔望月的累积总值都是整数，并且二者相等）。可是，刘歆只是在这一句里透露了一点他的发明，而在其他任何地方，他都不曾用这个新数值，还是只用原来太初历的数值。这是什么缘故呢？

这是因为朔望月和回归年是历法中最基本的数据。刘歆已经按照原来的数据建立了一套神秘的数学关系。如果要改动一个数据，特别是最基本的数据，则全套神秘关系都要推倒重来。一套神秘关系如果可以做这样大的改动，那么，它将不但得不到人们的信仰和崇拜，反而会引起人们对它的根本怀疑。权衡利弊，刘歆自然不得不在维持历法神秘性的要求下牺牲了他自己的科学发明。

四、冬至点的位置

太初历的冬至点按东汉贾逵的说法，是在牵牛初①。所谓牵牛初，是指牵牛中星（摩羯座 β 星）所在的那条赤经线。换句话说，按太初历的说法，当时的摩羯座 β 星的赤经正为 270°。用近代岁差理论可以推算得，这样的天象应该发生在公元前 450 年左右。也就是说，这个冬至点位置是袭用的古代数据，而并未经过实测。

贾逵的这个说法一直为后世所沿用。但是至少有两个例外。一个是唐代的李淳风。他指出："太初元年得本星度，日月合璧，俱在建星。"②一个是唐代的一行。他在《太衍历议·日度议》里指出："方周汉之交，日已潜退。其袭春秋旧历者，则以为在牵牛之首；其考当时之验者，则以为入建星度中。……故汉历冬至当在斗末，以为建星上得太初本星度，此其明据也。"③

查《汉书·律历志上》记载太初改历过程的那一段文字中说到，公孙卿、壶遂、司马迁等人经过一番测量，"至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁，中冬十一月甲子朔旦冬至，日月在建星，太岁

① 《续汉书·律历志中》。
② 《新唐书·历志三上》。
③ 《新唐书·历志三上》。

在子，已得太初本星度新正。”这段话当是李淳风、一行等人议论的依据。既然说是“已得太初本星度新正”，则可知后来邓平等人所定的太初历是使用了这个数据的。因此可以肯定，太初历的冬至点应在建星，至于具体的度数则已失传。

然而这个失传只是建星的距度或建星的距星失传罢了。冬至点位置本身却没有失传，尽管后来的人们都没有注意它。查《大衍历议·日度议》中说到：“歆以太初历冬至日在牵牛前五度。”可见，刘歆是知道太初历冬至点位置在哪里的。只因他用的二十八宿体系中没有建星，因此他倒过来，改用牵牛之前的度数来表示。按照刘歆的说法，太初历冬至点在牵牛中星之前五度（按360°制，则为4°55′41″），即摩羯座β星的赤经应为270°＋4°55′41″＝274°55′41″。这个数据与太初元年实际天象相差不大。

因此，贾逵等人所说的冬至在牵牛初，实际不是太初历而是三统历的数据。查《续汉书·律历志中》所引贾逵论冬至位置的那段文字中说到：“太初历斗二十六度三百八十五分。”我们从本文第一节中知道，太初历不用斗宿，而用建星。用斗宿的乃是三统历。可见，贾逵所说的太初历，实是三统历。

据《汉书·律历志上》的记载，刘歆作三统历的一个目的是：“以说《春秋》。”说《春秋》，当然包括说明《春秋》书中所载的天象。可是，刘歆当时还不知道岁差，因此，在他的历法里只能使用春秋时代的冬至点位置。查《三统历》本文的“统术”篇以及十二次表，都明白表示三统历的冬至点在牵牛初。

然而，离牵牛中星五度，这是一个很大的距离，它已超过了当时的测量误差范围。随着时间的推移，冬至点离牵牛中星越来越远。因此，人们越加无法维持冬至点在牵牛初的说法。事实上，刘歆也已知道当时冬至点并不在牵牛初的事实。他在三统历二十八宿距度表之后的那段文字里说到：“三终而与元终，进退于牵

牛之前四度五分。”所谓元终，是指从上元开始，经一元4617年之后，日月又重新回到十一月甲子朔旦冬至的位置。刘歆在这里怀着矛盾的心情，吞吞吐吐地承认冬至点不在牵牛初，而在牵牛之前四度五分。这个数据约和太初元年之前半个多世纪的天象相应。作为太初元年的测值，它的精确性差于太初历的数值，但仍然在当时的测量误差范围之内。由此也可以推断，这大约是刘歆当时测算的结果。虽然他的误差较大，但也表明刘歆本人对冬至点位置的测定是做过工作的。

五、两历比较小结

今把上述太初历与三统历的不同点列于表4—9。

表4—9　太初历与三统历的不同点

	太初历	三统历
二十八宿	用甘氏体系，仅有个别调整	用石氏体系
岁星周期	12年一周天	144年行145次
历元	近距历元	太极上元
基本数据	一朔望月为$29\frac{43}{81}$日，一回归年为$365\frac{385}{1539}$日	完全袭用太初历。但又暗中提出，一朔望月约为$29\frac{374}{705}$日，一回归年为$365\frac{378}{1539}$日
冬至点	在建星，或牵牛前五度	在牵牛初。但又承认在牵牛前四度五分

很可能还有其他不同点，这就有待于读者做进一步的探索了。但仅从以上这五点就可知道，刘歆并不是简单地抄袭太初历，而是有改造有发展的。当然，有的改造是保守的，如采用古代的冬至点位置；但总的来说，他是有新发现的，如岁星超次算法、新的朔望月和回归年值，等等。刘歆的太极上元既有繁复神秘的一面，也有促进天文学和数学发展的一面。就是关于冬至点的位置，刘歆也有承认现实，独立进行工作的一面。凡此种种，都从一

个侧面表明，自太初改历以后的100年间，天文学不是停滞不前，而是有进步有发展的。对于刘歆本人来说，上述各点表明，他是一位有发明能力的天文学家，在天文学上是有贡献的；但他也是一位保守的思想家，这种保守反过来影响了他在天文学上的贡献。他利用和发展了《易·系辞》里的数字神秘主义思想，把它套在天文学上，企图用这种办法来神化他所参与的王莽集团，以便为王莽篡权服务。正因为如此，他就不得不受自己制造出来的数字神秘主义体系的束缚，也就不得不受当时奉为经典的儒家经书的束缚。凡属突破这些束缚的新发现，就不得不予以割舍，或置入模糊的、附属的地位。这是作为天文学家的刘歆的一个悲剧。

第五章　东汉四分历研究

第一节　东汉四分历的颁行、法数和发展

太初历行用百多年后，历稍后天，出现了“朔先于历，朔或在晦，月或朔见”，日食多发生在晦日或晦前1日的情况。至元和二年(85)，“太初失天益远，日月宿度相觉浸多，而候者皆知冬至之日日在斗二十一度，未至牵牛五度”，冬至“后天四分日之三，晦朔弦望差天一日，宿差五度”。章帝于元和二年二月甲寅下诏改行编䜣、李梵校订增修的四分术。是为东汉四分历。一直行用到东汉亡(220)，三国蜀汉仍用之，迄后主炎兴元年(263)蜀汉亡，共行用了179年。它较三统历又有发展。是我国详细记载、完整留存的第二部历法。

一、基本法数和步术

《续汉书·律历志·历法》首先介绍了历法的基本知识和四分术组成。内容包括，昼夜形成、周日运动，太阳之自西向东运动，朔弦望晦的成因和月相，四季之形成，日道之南北，日南极影长而冬至，日北极影短夏乃至。二至之中，道齐景正为春秋分及岁时寒暑的关系。四分术岁首至也，月首朔也。至朔同日谓之章，同在日首谓之蔀，蔀终六旬谓之纪，岁朔又复谓之元。斗之二十一度，去极至远，日在焉而冬至。历始冬至，月先建子，时平夜

半。当汉高帝受命四十有五岁（前161），阳在上章，阴在执徐（庚辰），冬十有一月甲子夜半朔旦冬至，日月闰积之数皆自此始，立元正朔，谓之汉历。又上两元（元4560年），为月食五星之元（公元前161年加两元9120年为公元前9281年）。

根据立表测影，影长则日远，冬至为天度之始。历四周1461日而影长复初，是为日行之终。以周除日得岁长 $365\frac{1}{4}$ 日。日日行1度，亦为天度。察日月俱发度端，日行19周，月行254周，复会于端。以日周19除月周254，得1岁周天之数 $13\frac{7}{19}$。

上元庚申至汉高皇帝受命四十有五岁（前161）庚辰，积2760320年。

元法4560　　纪法1520　　纪月18800

蔀法76　　蔀月940　　蔀日27759

章法19　　章月235　　日法4

周天1461（$=4\times365.25$）为一岁的日分。

没数21（$21/4=5.25$）。

通法487（32个节气的日数）。

没法、章闰7（章19年中有7闰月）。

日余168（$\frac{168}{32}=5.25$，为岁长与六甲子之差）。

中法32。

通法/中法＝中节之长。

大周343335（$=235\times1461$）。

月周1016（$=4\times254$）。

135月有23食，食相复初，既者复既。得 $5\frac{20}{23}$ 月而一食，1岁有 $2\frac{55}{513}$ 食。古历常取公倍数以便运算。135月有23食，513岁

得1081食。4乘513等于27乘76为2052,四分历称作蔀会。20蔀会叫元会。故交食法数有

元会41040　　蔀会2052　　岁数513

食数1081　　月数135　　食法23

没数、没法,没日、灭日和推没灭术是后汉四分历新增的法数和历日、历术。平气由等分回归年长(岁实)得出。四分历每气长$15\frac{7}{32}$日。每气有余分7,称没法。二十四气共有余分168,化为日为$5\frac{8}{32}$日。四分历称这个$5\frac{8}{32}$日为没日。四分朔策为$29\frac{499}{940}$日,比30日短$\frac{441}{940}$日。12个月比360(6×60)天少$5\frac{592}{940}$$\left(5\frac{592}{940}=5.6298\right)$日。中国古历称此余日为灭日。每岁二十四气长365.25天,内有5.25个没日,平均$69\frac{4}{7}$日有1没日。12个朔望月长$12\times\frac{27759}{940}$日,内有$5\frac{292}{940}$个灭日,平均62.9456$\left(62\frac{888.8}{940}\right)$日有1个灭日。灭日是12个朔望月中应该有几个小月(29日),即12个月中小月的数目。与此类似,实际上没日就是二十四气中有多少个大气(大气16日,小气15日)。以气的余分减日长,中国古历称其余数为没限。四分历没限为$\frac{25}{32}$日。朔策小于30日之值,古历称作朔虚。四分历朔虚为$\frac{441}{940}$日。明代历书上分别称没、灭日为盈、虚日。中历清时宪书前一直用平气注历。平气加时(时分)大于没限者谓有没之气。凡气内有没日者,首尾计入气长17日,多1日,故曰盈。经朔时分小于朔虚者为有灭之朔。对于用平朔注历的历书,月内有灭日者其月小。至于具体哪一天是没日、灭日,各历均给出推步方法。

东汉四分历灭日的含义与此稍有不同。每气长 $15\frac{7}{32}$日。没法 7 为气长的余分。没限 25,是没法减中法之差。以没法 7 除通法 487 为没日间隔的长度,$69\frac{4}{7}$日,即岁实 365.25 与每岁的没日数 5.25 相除之商。没日推步方法为:

$$(\text{入蔀年}-1)\times\text{没数}21/\text{日法}4=\text{积没}+\frac{\text{没余}}{4}$$

$$\text{通法}487\times\text{积没}/\text{没法}7=\text{大余}+\text{小余}/7$$

大余满 60 除去,余数根据所入蔀蔀名命之,算尽之外(蔀名不计),得年前冬至前之没日干支和小余。加大余 69,小余 4,得次没。

$$\text{次没大、小余}=\text{没日大、小余}+69\frac{4}{7}$$

大余满 60 去之,小余满没法 7,进为大余。递求次没,使其所得仅有大余而无小余,称为灭日,即小余为 0 的没日叫灭日。次没小余比前增 4。由灭日开始,递求次没。当求第 7 个没日时小余又为 0,又得灭日。就是说 7 个没日中即得 1 灭日。7 个灭日共长 $69\frac{4}{7}\times7=487$ 日,为通法,是 32 个节气的长度。

东汉四分历的蔀、纪、岁名列于表 5—1。

表 5—1　东汉四分历蔀、纪、岁名

孟人岁 纪纪名	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子
仲天岁 纪纪名	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申
季地岁 纪纪名	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰
蔀　日 名　名	甲子 一	癸卯 二	壬午 三	辛酉 四	庚子 五	己卯 六	戊午 七	丁酉 八	丙子 九	乙卯 十	甲午 十一	癸酉 十二	壬子 十三	辛卯 十四	庚午 十五	己酉 十六	戊子 十七	丁卯 十八	丙午 十九	乙酉 二十

《续汉书·律历志》汉安论历中记载四分历的历元，“四分历仲纪之元，起于孝文皇帝后元三年（前161），岁在庚辰。上四十五岁，岁在乙未（前206），则汉兴元年也。又上二百七十五岁，岁在庚申，则孔子获麟。二百七十六万岁，寻之上行，复得庚申。”由此得出四分历仲纪之元汉文帝后元三年庚辰（前161）距庚申上元2760320岁。以元法4560去之，得$605\frac{1520}{4560}$，为605元加一纪。故续汉历志末尾论曰，“追汉四十五年庚辰（前161）之岁，追朔一日，乃与天合，以为四分历元。加六百五元一纪，上得庚申”。605元加一纪为上元庚申以来606元的第二纪（仲纪），四分历取作近距之元，并称之为天纪。

推求四分历某年的历日，首先要求出该年所入之蔀及在蔀内的位置，即入蔀第几年。四分历推入蔀术为：以元法（4560）除去上元以来积年，2760320加所求年距四分近距之元庚申（前161，汉文帝后元三年）之年数，其余数再以纪法（1520）除之，余数为入纪之年。以蔀法76除入纪年数，所得数从甲子蔀数起，0为甲子蔀，1为癸卯蔀等，得所入之蔀。蔀法76除入纪年数的余数为入蔀年数，知道了所求之年入某某蔀第几年，则是年的中朔闰余可很方便地得出。根据表5－1所入纪蔀首岁名，入蔀年数顺数，算外，即得所求年纪年干支。所求年距四分历近距之元（前161）庚辰之年数，如不满纪法1520，只需以蔀法76除之，即得所入之蔀及入蔀之年。

距元年/蔀法76＝所入蔀数＋所入年/76

东汉四分历对于月食五星也给出一个近距历元，汉文帝后元三年庚辰岁（前161），“又上两元，而月食五星之元并发端焉”。两元为9120年，即月食五星之近距之元为公元前9281庚辰岁。关于这个历元，下面推月食、步五星术中还要提到。这里只先指出，对于步月食，这个庚辰近距历元和距文帝后元三年（前161）庚辰2760320之庚申上元，并不完全对应。两元是有差别的。

续汉志历法说，日日行 1 度，亦为天度。察日月俱发度端。日行 19 周，月行 254 周，复会于端，是则月行之终也。以日周除月周，得一岁周天之数。以日一周减之，余 $12\frac{7}{19}$，则月行过周及日行之数也，为一岁之月。以除一岁日，为一月之数。太阳每日东行 1 度，即天每日西行 1 度。日行 19 周，而月行 254 周。

$$\text{一岁月行周天之数}=\frac{\text{月周 }254}{\text{日周 }19}=13\frac{7}{19}=13\frac{28}{76}$$

日行 19 周，为 19 岁、235 月、6939.75 日，等于月行 254 周。可得出月行一周为 27.32185039 日，为恒星月或经天月长。以除周天度 365.25 度，得月每日平行度为 $13\frac{28}{76}=13.36842105$ 度。

一岁月行周天之数，即月每日行天之度数。月岁行周天$13\frac{7}{19}$周内减日岁行 1 周，余 $12\frac{7}{19}$，为每岁月比日多行周天之数。也就是每日月比日多行之度数。它就是每岁之朔望月数。故

$$\text{朔望月长}=\text{一岁日 }365.25/12\frac{7}{19}=29\frac{499}{940}$$

$$=29.53085107\text{ 日}$$

恒星月 T、朔望月 S 和回归年 E 长及每日月行、日行度数之间的关系，实际上是由于地球、月亮公转和会合运动引起的。东汉四分历还不明岁差，视回归年与恒星年是一回事。它们之间有$\frac{1}{S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{E}$的关系。这个问题，我们留待第七章中再做详细介绍。

东汉四分历自章帝元和二年(85)施行，其后魏、蜀汉沿用，共行 179 年。元和二年距仲纪之元(前 161)庚辰 245 年，炎兴元年(263)距庚辰 423 年。由前所述，可知它们分别入辛酉蔀 18 年和己卯蔀 44 年。

二、东汉四分历的发展和创新

东汉四分历通过实测得出冬至日在斗 21.25 度，改变了三统历日在牛初的说法。历法自此始用斗分。公元 1 世纪中叶，冬至点太阳赤经约当斗 18°.96。四分历给出的冬至日在斗 21.25 度，化为 360°制，当斗 20°.94，约有 2°的误差。因为太阳甚亮，日出列宿皆熄。测定日躔，比较困难。晋姜岌始创根据月食所冲，判断日度所在。宋姚舜辅纪元历又创利用金星昏后明前验定星度，确定太阳位置的方法。它们都是比较准确的。但在先秦两汉，只能根据昏、旦、夜半中天之星，或观测月亮所在星宿位置来间接推出。昏旦、夜半及合朔时刻不易测准，月亮运动又有迟有疾。四分历实测所得约有 2°误差可以理解。

和帝永元年间，贾逵指出用黄道度日月弦望，比用赤道密近。至十五年(103)七月甲辰，诏书造太史黄道铜仪。东汉四分历第一次给出二十八宿的黄道宿度。冬至日在黄道斗 19.25 度。历术中黄道宿度与赤道宿度同时列出。

贾逵已发现月行有迟疾，月所行道有远近，及近地点也在移动。近地点月亮运动最快。贾逵说，近地点运动 1 月移动 3 度，“率一月移故所疾处三度，九岁九道一复”。9 和 19 的公倍数是 171。故 9 章 171 岁为合朔冬至日月过近地点的一个周期。现在知道，月球轨道长轴的方向在不断变化，近地点不停地向东移动。运行 1 周需时 3232 天(8.849 回归年)。其时的认识已如此密近，但四分历计算中未予采用。

四分历颁行初期，仍沿旧制，昼夜漏率按每 9 日增减 1 刻。永元十四年(102)，待诏太史霍融上言，指出这种旧制不与天相应，时差可至 2 刻半，宜随日进退。漏刻随日南北 2 度 4 分而增减 1 刻。太常史官运仪下水，证实旧制失天至 3 刻。而以晷影为刻，

则少所违失，密近有验。于是和帝十一月甲寅诏令改行新制。据浑仪测定的日去极远近度数，下参晷影，确定漏刻。新法漏刻随日南北而进退，二十四节气的昼夜漏刻变化就不是均匀的了。实际上，春秋二分附近，太阳赤纬变化极快，大约五六日即南北移动2度4分，昼夜漏刻就要增减1刻。而在冬夏二至前后，改变极慢，大约十四五日才变化1度，南北移动2度4分约需二十五六日。所以冬夏二至附近的昼夜漏刻就变化得比较缓慢。昼夜漏刻、晷影长短与日去极远近即赤纬的变化是相应的。四分历昼夜漏刻改变9日增减1刻的旧制，改行随日去极远近而进退，是时刻制度方面一大改革。这个问题在步晷漏中将做深入讨论。

为计算历日中朔，四分历给出了仲纪之元庚辰（前161）。同时又给出孔子获麟前276万年的庚申上元。这是冬至合朔齐同，又当五星会合日月交会之时。由仲纪之元，加605元1纪，乃得庚申上元。两种历元均便于计算。

四分历使用与三统历同样的周期预报月食，但有明确的月食计算历元，并发展了月食推步方法。四分历给出了两个月食计算历元。除庚申上元外，另给出由仲纪之元又上两元（公元前9281年）庚辰为月食五星的一个近距历元。对于推步月食，它与庚申上元相差一章。续汉志论月食说，四分因太初法以河平癸巳（前28）为元，此即庚申上元的近距之元。永元二年（91）甲辰诏书施行宗绀术，其近距历元为元帝初元二年甲戌（前47），早于河平癸巳一章。此元与四分历仲纪之元又上两元的庚辰历元相符。

三统历推步五星以始见为会合运动始点。四分历改以合伏为法，是个进步。

根据仪、表观测，测得太阳的黄道去极度及日中晷影，计算得出昼夜漏刻和昏旦中星。四分历首次给出了晷漏表，发展了步晷漏术，为后世历法效法。

历法数据如岁实(回归年)、朔策(朔望月)、月亮、五星行度、会合周期等都比三统历有改进。

四分历元和二年(85)施行时,真实回归年长365.2423076日,比四分历岁实365.25约短0.0076924日。而四分朔实29.53085107日比真实平朔望月29.53058464长0.00026643日。由于四分历岁实朔策仍较大,因此可知节气约130年就要后天1日,约303.46年(3753.33月)后朔日即将多出1天。就是说,虽然四分历比三统历稍有改善,但所取岁实、朔策偏大,行用日久仍将后天。

东汉四分历仲纪之元庚辰岁(前161)历元朔旦冬至基本合天。这个历元是推算选取的,与太初元年正好相差3章。根据四分历法数推步,经过3章57岁,太初元年为甲子蔀四章章首,岁前十一月朔旦冬至齐同,起于癸亥日卯时,天正朔大余59,小余235;冬至大余59,小余8(以32为分母)。因为到元和二年(85),太初历失天益远,候者皆知冬至之日日在斗21.25度,太初历冬至后天0.75日,晦朔弦望差天1日。四分历选取庚辰仲纪之元(前161)校正了太初历3/4日的后天。经笔者考查,在文帝后元三年(前161)年前冬至为癸亥日夜子时,合朔在乙丑日丑初。节气基本合天,合朔先天1日。在元和二年(85)后汉四分历颁行时距仲纪之元已过245年。按以上分析,是时节气应已后天近两日,合朔应大致合天。这一点从文献记载的日食可以看出。汉书五行志记载太初后日食25事,晦16,朔9。续汉书五行志记光武帝建武至章帝建初日食18次,内发生于晦日者15起,朔日3起。在施行太初历的187年中,共记录日食43事,内朔食12、晦食31。晦占72%,朔占28%。与四分历对太初历后天3/4日的评价大致相当。续汉志记录章帝元和以后日食54事,内发生于晦日者20(37%)、朔日者30(56%)、二日者4(7%)。由此看出,四分历日

食多发生在朔日，少数出现于晦日。以日食验朔可证，四分历比太初历是更为合天的。

第二节　太阳出没及步晷漏术

一、漏刻随去极度差而增损

刘歆三统历将以颁布历日为目的的古代历法加进了日月五星运动和交食方面的内容。后汉四分历在此基础上又有所发展，充实了有关时刻制度的推步方法。自此中国历法走上了完整的天体历的轨道。其内容包含推步中朔、发敛、日躔、月离、五星、交会、晷漏七个方面。

步晷漏术及表为四分历所增，后世皆从其法。内容包括实测得出的太阳位置、黄道去极度、晷影，及由此推算而定的二十四气昼夜漏刻和昏旦中星数值等及有关推步方法。

四分历说，“黄道去极、日景之生，据仪、表也。漏刻之生，以去极远近差乘节气之差。如远近而差一刻，以相增损。”说明黄道去极度，是根据浑仪测得，晷景尺寸是由圭表日中测影而来。而昼漏刻、夜漏刻数值是根据黄道去极度推算得出的。汉代时刻制度为日百刻，分成昼夜。日出至日没时间加昏明各 2.5 刻(共 5 刻)为昼刻；日没至日出刻数减昏明共 5 刻为夜刻。自西汉已经这样规定，东汉四分历沿用之。由实测得出自冬至到夏至、由夏至到冬至 182.625 日黄道去极度相差 48 度，而昼夜漏刻差 20 刻。平均黄道去极相差 1 度，漏刻相去 0.417 刻。例如冬至到小寒，黄道去极差 1.92 度，乘每度 0.417 刻，得 0.80 刻，故小寒昼漏刻比冬至大 0.8 刻，夜漏小 0.8 刻。小寒至大寒，黄道去极差 2.41 度，与 0.417 刻/度相乘得 1 刻，故大寒节气下昼刻比小寒大 1 刻，夜刻小 1 刻(原文“大寒夜刻五十三刻八分”，“八”误，应作二分)。

其他节气做法相同。这就是术文说的,“以去极远近差乘节气之差。如远近而差一刻,以相增损。”前面说过,四分历颁行之初,时刻制度仍沿旧制。因冬夏至相距 182.625 天,昼夜漏刻相差 20 刻,平均 9.13 天差 1 刻。旧制按每 9 日将昼夜漏刻数增损 1 刻。自和帝永元十四年(102)才诏行上述新制。因 1/0.417=2.4 度,故新制规定按黄道去极每相差 2.4 度,漏刻即增减 1 刻,而不再依相距天数增减刻数。

下面从天文角度对太阳出没、黄道去极与昼夜刻数的关系试做考查。

在由太阳赤经圈、黄道、赤道所组成的球面三角形中,太阳赤经圈与赤道交角是直角。由此正交三角形容易得出:

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$$

$$\cos l=\cos\alpha\cos\delta$$

由黄道、赤道坐标变换公式:

$$\sin\delta=\cos\varepsilon\sin b+\sin\varepsilon\cos b\sin l$$

因对于太阳,黄纬 b 为 0,所以 $\sin b=0$,$\cos b=1$,亦可方便地得出上述关系。其中 α、δ 为太阳赤经、赤纬,l 为太阳黄经,ε 为黄赤交角。

$$l=\text{近地点黄经}\ \pi+\text{真近点角}\ \upsilon$$

$$=\pi+M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\cdots$$

若太阳的角运动是匀速的,以 n 表示太阳对地球的平均角速度,过近地点的时刻为 t_0。$n(t-t_0)$表示任意时刻 t 太阳距近点的角度值。这个量称作平近点角,以 M 表示。这里和本书以后说的太阳运动,指的都是太阳的视运动。因地球绕日公转,人在地球上看起来,太阳在星空中由西向东运动。太阳中心对星空而言的周年轨迹,称作黄道。它在天球上是一个大圆。与地球自转轴垂直的平面,延伸与天球相交称天赤道。黄道面和赤道面的交角,

叫黄赤交角或黄道倾角，用 ε 表示。e 是地球轨道的偏心率。地球绕日公转的轨道是椭圆，但与正圆相差不大，偏心率 e 相当小。

将上式对时间 t 求导数。因 $M=n(t-t_0)$，有 $\frac{dM}{dt}=n$，于是得到太阳的视角速度

$$\frac{dl}{dt}=n(1+2e\cos M+\cdots)=3548''.2+118''.7\cos M+\cdots$$

微分

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$$

得

$$\cos\delta d\delta=\sin\varepsilon\cos l dl$$

代入上得之式，有近似关系

$$d\delta=\sin\varepsilon\cos\alpha dl=n\sin\varepsilon\cos\alpha(1+2e\cos M)dt$$

这就是太阳赤纬随时间变化的表示式。

从日出到日没为白天，称昼；自日没至日出为黑夜，叫夜。夏至白天最长、黑夜最短；冬至白昼最短，黑夜最长。昼夜长短是由太阳赤纬或去极度决定的。从连接太阳、天极的赤经圈（又称时圈）测量太阳距赤道的角度称赤纬 δ。太阳与北天极的角距叫黄道去极度。北天极距赤道任一点都相距 90°（中国度 91.31 度）。因此黄道去极度等于 $90°-\delta$（91.31 度加减太阳赤纬中度，太阳在赤道北为减，在赤道南为加）。夏至太阳在赤道北端，赤纬为 $+23°40'$（赤纬 δ 在赤道北为正，南为负），当赤纬极大，故称夏至为日长至、日北至；冬至太阳在赤道最南处，赤纬为 $-23°40'$，故又称日短至、日南至。中国古代将一日分作百刻，将日出前黎明的 2.5 刻和日没后黄昏的 2.5 刻加到日出到日没的白天的时间里称作昼刻，百刻内减昼刻的时间叫作夜刻。这样，历法中昼刻比日出到日没多 5 刻，夜刻比日没至日出时间少 5 刻。

天文上计算太阳出没时刻是根据下式计算的。该式由连接

太阳、天顶、北天极的赤经圈、方位圈（中历称地平高弧）组成的球面三角形极易导出

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

式中 z 为太阳的天顶距，φ 为观测地的地理纬度，δ 为太阳赤纬，t 为太阳赤经圈与午圈（南子午圈）之间的夹角，称作太阳的时角。

当太阳中心在地平圈上时，天顶距 z（沿地平经圈测量得出的太阳与天顶的距角）为 90°，故 $\cos z=0$，这样，上式变成：

$$\cos t=-\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\delta$$

太阳赤纬 δ，地理纬度 φ 已知，即可得出太阳出没的时角 t。t 又称半昼弧，给出太阳日没时的真太阳时角（将角度化为时刻，15°为 1 时）。午正时刻减去 t 即为日出时刻。

下面讨论由于太阳赤纬每日的变化 $\Delta\delta$，所引起的日出入时刻的变化 Δt。将上式微分得：

$$\sin t\Delta t=\mathrm{tg}\varphi\frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta}$$

根据三角关系，$\sin t$ 可以转化为下列形式：

$$\begin{aligned}\sin t&=\pm\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi\mathrm{tg}^2\delta}\\&=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\delta-\sin^2\varphi\sin^2\delta}}{\cos\varphi\cos\delta}\\&=\pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\cos\varphi\cos\delta}\\&=\pm\frac{\sqrt{\cos2\varphi+\cos2\delta}}{\sqrt{2}\cos\varphi\cos\delta}\end{aligned}$$

日没取上号，日出取下号。将以 φ、δ 余弦函数表示的 $\sin t$ 代入上述式中，得：

$$\Delta t=\frac{\sin\varphi\cdot\Delta\delta}{\cos\delta\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}$$

由前面得出的太阳赤纬随时间变化的表示式，求出每日太阳

赤纬的改变量，代入上式，可以计算得出在观测地点对太阳出入时刻的影响。不用这种微分计算的方法，根据每日太阳赤纬直接代入日出没算式，也同样可得出每日太阳出没时刻。其差分亦即为不同节气、日期对观测地太阳出入时刻的不同影响。表 5—2 列出二十四节气日期由上述方法计算得出的每日太阳赤纬变化，对于东汉都城洛阳由此引起的日出入时刻的增减值，以及太阳赤纬改变 2.4 度($2^{\circ}.365$)时相应日出入时刻的变化值。同时列出真二十四节气交气时刻的太阳赤纬、去极度及太阳出没时刻。计算选用四分历颁行时的各项有关数据。地球偏心率 e 为 0.017，黄赤交角 $23^{\circ}40'$，近地点黄经 π 取作 $250^{\circ}.15$，平近点角M＝太阳黄经 l－近地点黄经 $\pi(250^{\circ}.15)$。

天文上实际计算日出没时刻是根据下式：

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

日出入的时刻不是太阳中心在地平线上而是上边缘与地平线相切的时刻，即天顶距中还要增加太阳视半径 $16'$。另外大气折射将天体位置升高，所以还需增加蒙气差改正。蒙气差在地平时影响最大，天文年历取作 $34'$。视差使天体位置降低，太阳赤道地平视差仅有 $8''.8$，可以不计。这样日出没为太阳中心的地心天顶距 z 为 $90^{\circ}50'$的时刻。上式中以 z 为 $90^{\circ}50'$，φ 为当地纬度，δ 为其日太阳的赤纬，代入上式所得太阳的时角，化为时就是日没的真太阳时。这是距午正的时刻。如要化为民用地方时还要再加 12^{h}。日出时刻可由 12^{h} 减去太阳时角(化为时)得出。

由这种方法得出的太阳出没时刻与上述的太阳中心在地平线，$z=90^{\circ}$时的时角，相差：

$$\begin{aligned}d_1 t &= \frac{50'}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}\\ &= \frac{200^{s}}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}\end{aligned}$$

表 5—2 二十四定气赤纬、去极度、昼刻、赤纬日变、漏刻增减值

二十四气	黄经(°)	赤经(°)	赤纬(°)	去极度(°)	赤纬日变值(″)	赤纬日变所得 $\Delta t(s)$	$\Delta\delta$ 为 2.4 度漏刻增减	昼刻Ⅰ刻①	昼刻Ⅱ刻②
春分	0	0.00	0.00	90	1407.9	64.75	0.91	50.6	50.0
清明	15	13.79	5.96	84.04	1356.3	63.22	0.92	52.8	52.3
谷雨	30	27.87	11.58	78.42	1226.0	59.35	0.95	55.1	54.5
立夏	45	42.49	16.49	73.51	1017.8	52.01	1.01	57.2	56.5
小满	60	57.77	20.34	69.66	733.6	39.67	1.07	58.8	58.2
芒种	75	73.69	22.81	67.19	386.2	21.84	1.11	60.0	59.4
夏至	90	90.00	23.67	66.33	0.0		1.13	60.4	59.8
小暑	105	106.31	22.81	67.19	−388.6	−21.97	1.11	60.0	59.4
大暑	120	122.23	20.34	69.66	−742.3	−40.14	1.07	58.8	58.2
立秋	135	137.51	16.49	73.51	−1034.9	−52.88	1.01	57.2	56.5
处暑	150	152.13	11.58	78.42	−1251.2	−60.57	0.95	55.1	54.5
白露	165	166.21	5.96	84.04	−1387.2	−64.66	0.92	52.8	52.3
秋分	180	180.00	0.00	90.00	−1440.7	−66.26	0.91	50.6	50.0
寒露	195	193.79	−5.96	95.96	−1410.1	−65.74	0.92	48.3	47.7
霜降	210	207.87	−11.58	101.58	−1291.5	−62.53	0.95	46.1	45.5
立冬	225	222.49	−16.49	106.49	−1082.4	−55.31	1.01	44.1	43.5
小雪	240	237.77	−20.34	110.34	−784.4	−42.42	1.07	42.4	41.8
大雪	255	253.69	−22.81	112.81	−413.3	−23.37	1.11	41.3	40.6
冬至	270	270.00	−23.67	113.67	0.0		1.13	40.8	40.2
小寒	285	286.31	−22.81	112.81	410.9	23.24	1.11	41.3	40.6
大寒	300	302.23	−20.34	110.34	775.6	41.94	1.07	42.4	41.8
立春	315	317.51	−16.49	106.49	1065.3	54.44	1.01	44.1	43.5
雨水	330	332.13	−11.58	101.58	1266.3	61.31	0.95	46.1	45.5
惊蛰	345	346.21	−5.96	95.96	1379.2	64.29	0.92	48.3	47.7
春分	360	360.00	0.00	90.00	1407.9	64.75	0.91		

注：①、②昼刻Ⅰ由 $\cos t=\dfrac{\cos z-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$ 得出，昼刻Ⅱ由 $\cos t=-\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\delta$ 决定。

即，按照太阳中心在地平线，天顶距为 90°，依

$$\cos t = -\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\delta$$

计算得出的时刻，再加 d_1t 的改正，也可得到上述天文年历上所给出的日出日没的时刻。

由日出到日没时间加上晨昏蒙影时间即为昼刻，日没到日出时间内减去晨昏蒙影即得夜刻。古代晨昏蒙影称作昏、明，各取作固定的 2.5 刻。昏明合计 5 刻。现代天文上指太阳中心在地平线以下 6°的时刻为晨昏蒙影开始、结束时刻。不同季节稍有差异。总的说来都比 2.5 刻(合今 36 分钟)要短一些。天文中计算晨昏蒙影的开始和结束，也采用上述的算式。计算天顶距为 96°时的太阳时角(半昼弧)而得。

根据计算可以看出，在春秋分附近，太阳赤纬的日变量 $\Delta\delta$ 可达 23′～24′，向二至逐渐减少。到冬至、夏至其每日变化 $\Delta\delta$ 仅为几分。即太阳的赤纬运动对时间而言并不是均匀的。由表5－2还可看出，东汉永元十四年(102)施行的漏刻新制，改旧制随日进退(每 9 日官漏率移 1 刻)为随去极度差而进退(黄道去极南北相差 2.4 度而增减 1 刻)，是相当准确的，是天文历法发展上的一件大事。从春分到秋分，由冬至到夏至，漏刻随去极每 2.4 度而增减 1 刻的做法，由表看出，误差仅为 0.1 刻，而旧制误差可达 2～3 刻。四分历晷漏表确为历法史上的创举。

二、四分历黄道去极度与气朔失天

《续汉志》明确记载，表列的去极度、晷影尺寸是根据仪、表实测。这两组数据是晷漏表的基础，尤其黄道去极度，更直接关系到推算得出的昼夜漏刻、太阳出入时刻和昏旦中星数据的精确度。它也是古代时刻制度最基本数值，有必要对其进行较细致的考查。我们采用后汉四分历颁行时期的天文常数计算得到的黄道去极度，化为中国历度，

即乘以 1.01458（＝365.25/360），来与四分历晷漏表给出的黄道去极进行比较。四分历观测得出的数值注以（o），我们计算的结果以（c）标注，这两组数值以及它们之差（$o-c$）列于表 5－3。计算显示，四分历测定的黄道去极比真实的太阳去极度有较大的误差。最大误差达 2.3 度。春分前后，立春到清明，误差都在 2 度以上。并且总的来说，四分历测定的黄道去极数值偏小，平均太阳偏北 1.123 度。

表 5－3　四分历去极度晷影与定气值的比较

二十四气	去极度（c）度	去极度（o）度	（$o-c$）度	晷影尺（o）	晷影尺（c）	（$o-c$）尺
春分	91.31	89.08	2.23	5.25	5.52	－0.27
清明	85.27	83.17	2.1	4.15	4.36	－0.21
谷雨	79.56	77.83	1.73	3.2	3.396	－0.20
立夏	74.58	73.17	1.41	2.52	2.61	－0.09
小满	70.68	69.67	1.01	1.98	2.04	－0.06
芒种	68.17	67.17	1.0	1.68	1.67	0.01
夏至	67.30	67.08	0.22	1.50	1.54	－0.04
小暑	68.17	67.83	0.34	1.70	1.67	0.03
大暑	70.68	70.00	0.68	2.0	2.04	－0.04
立秋	74.58	73.58	1.0	2.55	2.61	－0.06
处暑	79.56	78.58	0.98	3.33	3.40	－0.07
白露	85.27	84.33	0.94	4.35	4.36	－0.01
秋分	91.31	90.58	0.73	5.5	5.52	－0.02
寒露	97.36	96.83	0.53	6.85	6.86	－0.01
霜降	103.06	102.33	0.73	8.4	8.34	0.06
立冬	108.04	107.33	0.71	10.0	9.91	0.09
小雪	111.95	110.92	1.03	11.4	11.38	0.02
大雪	114.46	113.83	0.63	12.56	12.51	0.05
冬至	115.33	115.00	0.33	13.0	12.95	0.05
小寒	114.46	113.08	1.38	12.3	12.51	－0.21
大寒	111.95	110.67	1.28	11.0	11.38	－0.38
立春	108.04	106.33	1.71	9.6	9.91	－0.31
雨水	103.06	101.08	1.98	7.95	8.34	－0.39
惊蛰	97.36	95.08	2.28	6.5	6.86	－0.36
春分	91.31	89.08	2.23	5.25	5.52	－0.27

四分历测定的与天文上真实的黄道去极度误差较大，可能有两个原因：①四分历黄道去极是根据平气观测得出的。平气与定气不同。平气是将一回归年等分为24份，每份长15.21875日。自冬至开始，每15$\frac{7}{32}$日为1节气。节气的长度是固定的。定气是将黄道圈等分为24份，视太阳在黄道上运动，从黄道与赤道相交的升交点（太阳通过此点由赤道南进入赤道北）算起，每到一个分点交一个节气。因为视太阳运动有疾徐，所以各个节气的时间长度是不等的。②四分历黄道去极测定时节气失天较多造成的。也就是说，这个误差是因为四分历晷漏表测定所依据的节气日期时刻与天文上真正冬至、立春、春分等节气有较大时间差别引起的。为讨论这个问题，我们先考查一下四分历的合天情况。

刘宋祖冲之说，“四分历法虽分章设蔀创自元和，而晷仪众数定于熹平三年（174）。”因此，我们考查四分历仲纪之元即文帝后元三年（前161），后汉四分历颁行之章帝元和二年（85）及灵帝熹平三年（174），这三个时期四分历气朔与天象的符合情况。为此，用四分历推步算出这三年的气朔日期时刻，来和我们根据现代天文方法计算得出的实朔和交节气的时刻进行比较。朔、气合天情况的考查结果分别列于表5－4、表5－5中。

前面曾经介绍，二分前后，太阳赤纬变化很快，每日约行20余分；两至前后赤纬改变十分缓慢，每日仅有几分。日中晷影长度由

$$L=\text{表高}\times \mathrm{tg}(\varphi-\delta)$$

决定。式中φ为观测地纬度，δ为太阳赤纬，赤道以北为正，以南为负。表高通常为8尺。微分上式，得：

$$\Delta L=8\,\frac{\Delta\delta}{\cos^{2}(\varphi-\delta)}$$

表 5—4　东汉四分历节气合天情况

	文帝后元三年(前161)			元和二年(85)					熹平三年(174)					
	平气		太阳黄经	平气		太阳黄经	定气		平气		太阳黄经	定气		失天
	月日	时分	°	月日	时分	°	月日	时分	月日	时分	°	月日	时分	日
冬至	12.25	0:0	270.00	12.24	6:0	271.75	12.22	12:21	12.24	12:00	272.38	12.22	3:34	2.35
小寒	1.9	5:15	285.46	1.8	11:15	287.22	1.6	6:28	1.8	17:15	287.85	1.5	21:28	2.82
大寒	1.24	10:30	300.83	1.23	16:30	302.60	1.21	2:16	1.23	22:30	303.24	1.20	17:9	3.22
立春	2.8	15:45	316.08	2.7	21:45	317.86	2.5	0:41	2.8	3:45	318.51	2.4	15:12	3.54
雨水	2.23	21:00	331.20	2.23	3:00	331.01	2.20	1:53	2.23	9:00	333.66	2.19	16:9	3.70
惊蛰	3.10	2:15	346.19	3.10	8:15	348.01	3.7	6:29	3.10	14:15	348.67	3.6	20:17	3.75
春分	3.25	7:30	1.04	3.25	13:30	2.88	3.22	14:14	3.25	19:30	3.55	3.22	3:43	3.66
清明	4.9	12:45	15.76	4.9	18:45	17.62	4.7	1:21	4.10	0:45	18.30	4.6	14:23	3.43
谷雨	4.24	18:00	30.39	4.25	0:0	32.26	4.22	15:4	4.25	6:00	32.94	4.22	3:52	3.09
立夏	5.9	23:15	44.94	5.10	5:15	46.82	5.8	7:11	5.10	11:15	47.52	5.7	19:40	2.65
小满	5.25	4:30	59.44	5.25	10:30	61.33	5.24	0:37	5.25	16:30	62.03	5.23	12:56	2.15
芒种	6.9	9:45	73.92	6.9	15:45	75.82	6.8	18:49	6.9	21:45	76.52	6.8	7:5	1.61

续表

	文帝后元三年(前161)			元和二年(85)					熹平三年(174)					
	平气		太阳黄经	平气		太阳黄经	定气		平气		太阳黄经	定气		失天
	月日	时分	°	月日	时分	°	月日	时分	月日	时分	°	月日	时分	日
夏至	6.24	15:00	88.43	6.24	21:00	90.32	6.24	12:36	6.25	3:00	91.03	6.24	0:51	1.09
小暑	7.9	20:15	102.78	7.10	2:15	104.87	7.10	5:14	7.10	8:15	105.57	7.9	17:44	0.60
大暑	7.25	1:30	117.61	7.25	7:30	119.49	7.25	19:54	7.25	13:30	120.19	7.25	8:31	0.21
立秋	8.9	6:45	132.35	8.9	12:45	134.21	8.10	7:55	8.9	18:45	134.90	8.9	20:56	−0.09
处暑	8.24	12:00	147.21	8.24	18:00	149.05	8.25	16:55	8.25	0:00	149.74	8.25	6:10	−0.26
白露	9.8	17:15	162.20	9.8	23:15	164.03	9.9	22:33	9.9	5:15	164.70	9.9	12:17	−0.29
秋分	9.23	22:30	177.34	9.24	4:30	179.14	9.25	0:57	9.24	10:30	179.80	9.24	14:58	−0.19
寒露	10.9	3:45	192.60	10.9	9:45	194.38	10.10	0:12	10.9	15:45	195.03	10.9	14:40	0.05
霜降	10.24	9:00	207.97	10.24	15:00	209.74	10.24	20:52	10.24	21:00	210.39	10.24	11:33	0.39
立冬	11.8	14:15	223.44	11.8	20:15	225.19	11.8	15:25	11.9	2:15	225.83	11.8	6:27	0.83
小雪	11.23	19:30	238.96	11.24	1:30	240.70	11.23	8:43	11.24	7:30	241.34	11.22	23:45	1.32
大雪	12.9	0:45	254.49	12.9	6:45	256.24	12.8	1:21	12.9	12:45	256.87	12.7	16:33	1.84

表 5—5　东汉四分历合朔失天情况

文帝后元三年(前161)					元和二年(85)					熹平三年(174)				
四分		实朔		失天(分)	四分		实朔		失天(分)	四分		实朔		失天(分)
甲子	0^{m}	乙丑	114^{m}	1554	壬午	689^{m}	壬午	692^{m}	3	乙亥	1362^{m}	乙亥	1113^{m}	－249
癸巳	764^{m}	甲午	1041^{m}	1717	壬子	14^{m}	辛亥	1339^{m}	115	乙巳	686^{m}	乙巳	302^{m}	－384
癸亥	89^{m}	甲子	360^{m}	1711	辛巳	178^{m}	辛巳	505^{m}	327	乙亥	11^{m}	甲戌	892^{m}	－559
壬辰	853^{m}	癸巳	952^{m}	1539	辛亥	103^{m}	庚戌	1094^{m}	449	甲辰	775^{m}	甲辰	19^{m}	－756
壬戌	178^{m}	壬戌	1415^{m}	1237	庚辰	867^{m}	庚辰	273^{m}	－594	甲戌	100^{m}	癸酉	587^{m}	－953
辛卯	942^{m}	壬辰	371^{m}	844	庚戌	192^{m}	己酉	969^{m}	663	癸卯	864^{m}	壬寅	1196^{m}	－1108
辛酉	267^{m}	辛酉	776^{m}	509	己卯	956^{m}	己卯	330^{m}	－626	癸酉	188^{m}	壬申	456^{m}	－1172
庚寅	1031^{m}	庚寅	1263^{m}	232	己酉	280^{m}	戊申	1227^{m}	493	壬寅	953^{m}	辛丑	1286^{m}	－1107
庚申	355^{m}	庚申	449^{m}	94	戊寅	1045^{m}	戊寅	746^{m}	－299	壬申	277^{m}	辛未	807^{m}	－910
己丑	1120^{m}	己丑	1246^{m}	126	戊申	369^{m}	戊申	284^{m}	－85	辛丑	1042^{m}	辛丑	413^{m}	－629
己未	444^{m}	己未	776^{m}	332	丁丑	1134^{m}	丁丑	1245^{m}	111	辛未	366^{m}	辛未	22^{m}	－344
戊子	1209^{m}	己丑	447^{m}	678	丁未	458^{m}	丁未	719^{m}	261	庚子	1108^{m}	庚子	1004^{m}	－104
戊午	533^{m}	己未	189^{m}	1096	丙子	1222^{m}	丁丑	112^{m}	330	庚午	455^{m}	庚午	443^{m}	－12

而

$$\Delta\delta=\sin\varepsilon\cdot n\cdot\cos\alpha(1+2e\cos M)$$

根据表 5—4 中元和二年(85)冬至的黄经值代入,算出冬至前后 1 日,赤纬改变值 Δ 仅为 49″,前后第 2 日仅为 77″.5。由 ΔL 式分别得出由此引起的晷影长度改变仅为 0.007 和 0.011 尺。将赤纬改变值考虑进去,使用 L 式计算,所得结果相同。

我国古代历法是根据日景观测确定冬至日期时刻,然后递加节气长度(四分历为 $15\frac{7}{32}$日),得各节气。可以看出,根据圭表日中测景要得到准确的日至并不容易。在表 5—4 中,四分历取作仲纪之元的文帝后元三年(前 161),冬至时刻与天象完全一致。这确是一种非常难得的巧合。四分历由于岁实较大,节气 130 年就要多出 1 日。文帝后元三年冬至合天,到了 245 年后,四分历颁行的元和二年(85),冬至已后天 1.74 日。又过 89 年,即文帝后元三年后 334 年的熹平三年(174),冬至已后天 2.35 日。根据《续汉志》晷漏表后的记载和宋书历志所述祖冲之的说明,可知东汉四分历晷漏表测定完成于熹平三年。即晷漏表所载的主要数据很可能是根据多年观测而于熹平三年综合其时观测和推算结果而成。由我们的计算可看出熹平三年冬至时刻已后天 2.35 日。

中国历书清时宪书前一直用平气注历。我们在表 5—4 中是用真气与之比较。在下面关于黄道去极、晷影、昼夜漏刻、日出入的讨论中采用平气数值。此处与定气比较,目的是由此可以看出东汉四分历给出的二十四气与天的合失情况。还需要说明一点,如果近地点与冬至点严格相合的话,测定的冬至点失天的数值,应该与二十四气平气、定气误差的平均值一致。但从我们的计算和表 5—4 看出,四分历对比分析的这三组结果均不相合。这是因为东汉时,太阳近地点与冬至并不相合。近地点在冬至点西侧

约 20°之处，即近地点黄经约为 250°。四分历仲纪之元(前 161)，冬至合天，但二十四气与定气的平均误差为$-0^{\circ}.807$，这个差就是因为近地点、冬至点不合而由中心差引起的。中心差表达式为：

$$l-\bar{l}=2e\sin M+\frac{5}{4}e^{2}\sin 2M+\cdots$$

其中 e 为地球轨道偏心率，约为 0.017，M 为平近点角，$\bar{l}$ 为平黄经，等于近地点黄经 π 与 M 之和。π 在前 161 年时约为 246°，在公元 85 年约为 250°.1，在 174 年约为 251°.7。冬至点黄经为 270°。对于前 161 年，$M=24^{\circ}$，代入上式，得到中心差为 0°.8077；对于公元 85、174 年，M 分别为 19°.9 和 18°.3，中心差分别为 0°.6763和 0°.6240。就是说，虽然四分历仲纪之元冬至合天，但平均说来前 161 年四分历的节气与定气相差约$-0^{\circ}.81$，即先天 0°.81。同样可得，元和二年、熹平三年平气与定气平均相差分别为 1°.02 和 1°.69(均为后天)。这是严格意义下的四分历节气的失天值。这两个数值与中心差相加，就得出这两年冬至的后天值。综上所述，东汉四分历在历法上有很大发展，尤其步晷漏术，但它测定的冬至和节气仍约有 2 日的失天。

四分历施行时期，合朔是比较合天的。朔望失天通过日月食很宜觉察。采用与节气失天的类似分析方法，我们分别用四分术和现代天文方法推算了四分历仲纪之元(前 161)、元和二年(85)和熹平三年(174)的合朔时刻。比较得出，文帝后元三年(前 161)四分历合朔时刻约先天 0.612 日；四分历颁行的元和二年(85)合朔基本合天，仅约先天 0.047 日；到了熹平三年(174)，四分历推步的合朔约后天 0.479 日。考查结果列于表 5－5。因此四分历施行期间，日食基本合天，大部分发生在朔日，少数出现在晦日，个别的早期日食发生在二日。改变了汉初和行用太初历期间日食多发生在晦日的朔后于天的局面。

讨论了四分历气朔合天情况，现在再回过头来考查四分历测

定的黄道去极数值的精度。

四分历晷漏表中黄道去极、晷影是用仪、表观测得出的。观测是依据四分历节气日期进行的。我们依据四分术推出元和二年(85)和熹平三年(174)的交节日期时刻，用现代方法计算与这些时刻对应的太阳黄经、赤纬、去极度及日中晷影长度，来和四分历晷漏表中给出的数值进行比较，考查它的精度。结果列于表5—6中。

计算太阳黄经的方法将在第九章中做介绍。求出太阳黄经 l 以后，由 $\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$ 计算太阳赤纬 δ。ε 采用东汉时的数值约 23°40′。黄道去极度＝90°－δ。得出的黄道去极度与四分历晷漏表给出值，化为相同的度值(360°或 365.25 度)后进行比较($o-c$)。元和二年(85)计算值与表列值相差最大的为 1.13 度，最小的为 0.22 度，平均为 0.728 度。熹平三年(174)计算值与四分历表列黄道去极相去最大值为 1.32 度，最小为 0.23 度，平均亦为 0.728 度。四分历晷漏表给出的黄道去极，比这两组计算的相应值全都小。也就是说，四分历测得的每一个黄道去极值都比真实的太阳距极度要小。换句话说，就是四分历测出的太阳正午高度都较真太阳为高，平均高 0.728 度(0°.718 或 43′)。

四分历晷漏表给出每气的黄道去极比真实太阳去极都小约 0.728 度。误差是由仪器和观测误差引起的。但，作者认为，可能其中主要部分是由大气折射引起的。大气折射使天体的地平高度升高。虽然，对于中原地区，即使冬至太阳高度最低时，折射对天体高度的影响仅 1′～2′。但对于地平，折射可引起 34′～35′的高度变化。因此，如根据视太阳在地平及南中时的高度差，与北极出地相加，以减半周天，得出的黄道去极就可能比真太阳去极度小一个地平折射改正 34′～35′。即这样得出的太阳高度会多出一个蒙气差改正值。要测准太阳在地平或南中时的中心位置

表 5—6 元和二年、熹平三年晷影、昼漏(日出至日入)数值考查

平气节	去极度 (o) (°)	晷影 (o) (尺)	昼漏刻 (o)	熹平三年平气			$o-c$	元和二年平气			$o-c$	昼刻Ⅰ (c)	$o-c$	昼刻Ⅱ (c)	$o-c$
				黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)		黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)					
春分	87.80	5.25	50.8	3.56	1.43	5.23	0.02	2.89	1.16	5.28	—0.03	51.1	—0.3	50.5	0.3
清明	81.97	4.15	53.3	18.32	7.25	4.18	—0.03	17.63	6.98	4.19	—0.04	53.4	—0.1	52.8	0.5
谷雨	75.71	3.2	55.5	32.97	12.62	3.23	—0.03	32.28	12.38	3.27	—0.07	55.5	0	54.9	0.6
立夏	72.12	2.52	57.4	47.53	17.22	2.50	0.02	16.83	17.02	2.53	—0.01	57.5	—0.1	56.9	0.5
小满	68.67	1.98	58.9	62.05	20.77	1.97	0.01	61.34	20.62	1.99	—0.01	59.1	—0.2	58.4	0.5
芒种	66.20	1.68	59.9	76.53	22.98	1.65	0.03	75.83	22.91	1.66	0.02	60.1	—0.2	59.5	0.4
夏至	66.12	1.5	60	91.04	23.66	1.55	—0.05	90.33	23.67	1.54	—0.04	60.4	—0.4	59.8	0.2
小暑	66.86	1.7	59.7	105.58	22.75	1.68	0.02	104.88	22.83	1.67	0.03	60.0	—0.3	59.3	0.4
大暑	68.99	2.0	58.8	120.20	20.30	2.04	—0.04	119.50	20.45	2.02	—0.02	58.8	0	58.2	0.6
立秋	72.52	2.55	57.3	134.91	16.52	2.61	—0.06	134.22	16.72	2.58	—0.03	57.2	0.1	56.6	0.7
处暑	77.45	3.33	55.2	149.75	11.67	3.38	—0.05	149.27	11.91	3.34	—0.01	55.1	0.1	54.6	0.6
白露	83.12	4.35	52.8	164.71	6.08	4.35	0.00	164.04	6.34	4.30	0.05	52.9	—0.1	52.3	0.5
秋分	89.28	5.5	50.2	179.82	0.072	5.50	0.00	179.15	0.34	5.45	0.05	50.6	—0.4	50.0	0.2

续表

节气平	去极度 (o)(°)	晷影 (o)(尺)	昼漏刻 (o)	熹平三年平气			o−c	元和二年平气			o−c	昼刻Ⅰ (c)	o−c	昼刻Ⅱ (c)	o−c
				黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)		黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)					
寒露	95.43	6.85	47.6	195.04	−5.98	6.85	0.00	194.4	−5.73	6.79	0.06	48.3	−0.7	47.7	−0.1
霜降	100.86	8.4	45.3	210.4	−11.72	8.38	0.02	209.75	−11.49	8.31	0.09	46.0	−0.7	45.4	−0.1
立冬	105.79	10.0	43.2	225.84	−16.74	10.00	0.00	225.21	−16.55	9.93	0.07	43.9	−0.7	43.3	−0.1
小雪	109.33	11.4	41.7	241.35	−20.63	11.52	−0.12	240.72	−20.50	11.47	−0.07	42.3	−0.6	41.6	0.1
大雪	112.19	12.56	40.5	256.88	−23.01	12.61	−0.05	256.25	−22.95	12.58	−0.02	41.2	−0.7	40.5	0.0
冬至	113.35	13.0	40	272.4	−23.64	12.92	0.08	271.77	−23.65	12.93	0.07	40.9	−0.9	40.2	−0.2
小寒	111.45	12.3	40.8	287.87	−22.46	12.35	−0.05	287.24	−22.54	12.39	−0.09	41.4	−0.6	40.8	0.0
大寒	109.08	11.0	41.8	303.26	−19.61	11.10	−0.10	302.62	−19.76	11.16	−0.16	42.7	−0.9	42.1	−0.3
立春	104.80	9.6	43.6	318.53	−15.42	9.54	0.06	317.89	−15.61	9.61	−0.01	44.5	−0.9	43.9	−0.3
雨水	99.63	7.95	45.8	333.68	−10.25	7.96	−0.01	333.02	−10.59	8.05	−0.10	46.6	−0.8	46.0	−0.2
惊蛰	93.71	6.5	48.3	348.69	−4.52	6.51	−0.01	348.03	−4.78	6.57	−0.07	48.8	−0.5	48.3	0.0

注：昼刻Ⅰ、昼刻Ⅱ参见表5—2注。

也不容易，也会引进一定的误差。

三、日中晷影和昼夜漏刻

黄道去极、太阳高度 h 与太阳天顶距、太阳赤纬 δ 和观测地地理纬度 φ 之间有下列关系：

$$z=\varphi-\delta, h=90^\circ-z$$

$$\text{黄道去极}=90^\circ-\delta=z+90^\circ-\varphi$$

$$=180^\circ-h-\varphi=\varphi-\delta+90^\circ-\varphi$$

因此

$$z=\text{黄道去极}+\varphi-90^\circ$$

日中晷影与太阳天顶距 z，太阳赤纬 δ，当地纬度 φ，黄道去极之间的关系为：

$$\text{晷影长度(尺)}=8\text{tg}z=8\text{tg}(\varphi-\delta)$$

$$=8\text{tg}(\text{黄道去极}+\varphi-90^\circ)$$

根据上述关系，将四分历晷漏表给出的黄道去极数值(化为360°制)及东汉都城洛阳的纬度 34°.60 和地中阳城纬度 34°.3 代入，得出的晷影长度，与晷漏表列的晷影尺寸是不同的。似与洛阳较为密近，阳城稍疏。就洛阳而言，小雪、小寒节气相差最大，各为 4 寸 2 分；赤纬改变最慢的夏至前后，如芒种，相去 1.5 寸，小暑 0.8 寸，相差也很大。可证，四分历晷漏表中晷景数值确为圭表所测，而非据黄道去极推算得出。

采用与前面黄道去极类似的方法，下面考查四分历晷景数值合天情况与精度。首先根据合天节气得出的太阳去极，推算晷景长度来与表列数值比较。计算显示，由大寒到谷雨八个节气表列与合天数值相差较大，误差都在 2 寸以上，最大为大寒、雨水，相差近 4 寸。这一点与前面对四分历节气失天的分析结果是一致的。由于远地点到近地点半周四分历节气比较合天，这一段晷影

相差皆不到1寸。

另外，由四分术推出的元和二年(85)和熹平三年(174)节气时刻计算真太阳黄经、赤纬，用东汉都城洛阳的地理纬度$\varphi 34^{\circ}.60$，代入

$$晷影长度(尺)=8\mathrm{tg}(\varphi-\delta)$$

得出的晷影尺寸与四分历晷漏表测定值比较，考查结果也列于表5—6。由表看出元和二年晷影值与表列尺寸相比，最大误差出现在大寒，为0.16尺，雨水影长相去0.1尺，最小相差仅为0.01尺，平均误差0.0142尺，仅有1分许。而阳城平均误差0.062尺。熹平三年晷影尺寸与四分历表列值更为符合，最大相差为小雪节气0.12尺，其次为大寒相去0.10尺。有四气晷影长度与表列值相同，并有三个节气相差仅0.01尺。总的趋势比元和二年更接近四分历晷漏表晷景尺寸。它的平均误差也为0.0142尺，即1.4分。而阳城的平均误差是5.9分。

由四分历晷漏表所给出的黄道去极及晷影尺寸考查结果看出，这些数值确系其时实测，基本上可认为是经过多年观测得出的。而与熹平三年数值更为接近，误差弥散较小，晷漏表大致上主要依据这一年的观测结果。

四分历晷漏表所列出的昼夜漏刻数是根据黄道去极远近乘节气之差计算得出的。这一点《续汉志》中有明确记载。关于它的计算方法，在前面已做了介绍。有的作者认为四分历晷漏表中的昼夜漏刻数与黄道去极、晷影尺寸一样也是由观测得出的，可能是出于误会。我们已对四分历测定的黄道去极、晷景长度的观测精度做了考查。那么，根据黄道去极每差2.4度，昼夜漏刻即增损1刻比例关系得出的昼夜漏刻数与真实太阳出没时刻是否一致，误差有多大呢？对这个问题，我们依天文学的二十四气定气，四分历熹平三年(174)平气两种系统，每种都分别采用两种计

算方法进行考查。方法Ⅰ,考虑大气折射改正,计算太阳上下边缘与地平相切的真实太阳出没时刻;和方法Ⅱ,不考虑大气折射,太阳中心在地平计算太阳出没的时间。观测地点仍取作东汉都城洛阳,纬度 34°.60。有

$$\cos t_{\mathrm{I}} = (\cos 50' - \sin\varphi \sin\delta)/(\cos\varphi \cos\delta)$$

$$\cos t_{\mathrm{II}} = -\mathrm{tg}\varphi \,\mathrm{tg}\delta$$

计算得出的天文二十四气太阳出没时刻 t_{I}、t_{II},对应的白昼刻数(日出到日入)列于表 5－2,推出的熹平三年(174)四分历平气时刻算得的太阳出没时刻 t_{I}、t_{II},相应的日出到日入的昼漏刻数在表 5－6 中给出。

天文二十四气得出的日出到日没白昼刻数Ⅰ与四分历晷漏表昼漏刻减 5 刻得到的相应白昼刻数相比,寒露到大寒一段误差最大,相差都在半刻以上,最大为立冬,0.9 刻。三个节气昼刻相同,四个节气误差仅为 0.1 刻。平均误差 0.26 刻。就是说,四分历晷漏表给出的昼夜漏刻数,与天文二十四气定气由真太阳出没所得出相应刻数比较接近;而与不考虑大气折射,以太阳中心在地平线计算得出的相应白昼刻数差得稍大一些。后者有两气误差为 1 刻。相差大于 0.5 刻者有九气,而前者为七气。

前面考查黄道去极、日中晷景得出,四分历晷漏表中这两项数值是根据实测得出的,而观测主要是按照熹平三年平气时刻进行的。但依熹平三年(174)四分历平气时刻计算得出的太阳赤纬求得的真实太阳出没时刻 t_{I}(考虑大气折射,按太阳上下边缘与地平相切为太阳出没时刻)得到的昼刻却与四分历晷漏表相应昼刻数值相差较大。其中相差 0.5 刻以上者共有十气,平均相差 0.41 刻,并且四分历表列昼刻数全小于计算得出值($2t_{\mathrm{I}}$),即 $(o-c)$ 全为负值。而另一方面,由太阳中心在地平,不考虑大气折射得到的日出入时刻 t_{II},由 $2t_{\mathrm{II}}$ 确定的昼刻与四分历表列的相

应值却较为接近。相差 0.5 刻以上者仅有四气,三气昼刻数相同,四气相差仅为 0.1 刻,平均误差只有 0.2 刻。

综上所述,四分历晷漏表昼夜漏刻数值虽系据黄道去极相差值比例推算而得,但它的精度还是比较高的。前面我们曾经论证过,根据去极相差 2.4 度而漏刻增损 1 刻的做法是很科学、准确的。不论年中什么日子,由此产生昼夜漏刻最大误差都在 1.1 刻以内。表列的昼夜漏刻数,对于天文定气和四分历施行期间的平气都是比较准确的,最大误差不超过 1 刻钟(14.4 分)。

第三节　昏旦中星和黄道赤道日度

中国历法是阴阳合历。二十四节气就是中历的阳历成分。推步制历以前,人类都经历了一个较长时期的观象授时的阶段。就是依据某些特定星象,如参、昴、大火、鸟星、虚、定等的出没南中及北斗七星斗柄的指向来确定岁时季节。《尚书·尧典》记载有:"日中星鸟,以殷仲春;日永星火,以正仲夏;宵中星虚,以殷仲秋;日短星昴,以正仲冬。"说明中国古时曾以鸟(今长蛇座 α 星)火(今天蝎座 α,中名心宿二)虚(今小马座 α、宝瓶座 β,中名虚宿一、二)昴(在今金牛座,中名昴宿,俗称七姐妹)昏时南中(过南天子午圈)的星象来判定二分二至的日子。《吕氏春秋·十二月纪》、《礼记·月令》给出了为确定各节气月时序的昏旦中星的星象标志。可见利用昏旦中星确定时节的方法是中历的传统。四分历予以继承,晷漏表给出了各交节时日的昏、旦中天星度。术文中介绍了昏、旦中星推步方法。昏、旦又称昏、明。四分历及以后各历皆指日没后、日出前 2.5 刻之时。天文上指日没后、日出前太阳中心在地平线下 6°的时刻。这时室外活动可以不用照明,晚上亮星开始出现,晨时明星刚好完全消失。2.5 刻相当现在的

36分钟。就中原所处纬度而言,中历说的比天文学指的昏旦,36^m时间稍长一点,长5～10分钟。昏明中星是指昏旦时刻正好南中(过南天子午线)的星象或星度,即昏明时太阳所处星度与昏明时太阳距午(南天)度相加之和。

太阳中心连续两次过南天子午线的时间间隔叫一日,即一昼夜。天文上称作真太阳日。因日行有盈缩,加上太阳不在赤道而在黄道上运动,黄道赤道有$23^\circ.5$的交角,即使太阳在黄道上运动是匀速的,太阳运动引起的赤经变化也不是均匀不变的。因此,真太阳日长度并不固定而是有变化的。天文上取真太阳日的平均长度为平太阳日。即称太阳中心连续两次南中的平均时间为一平太阳日。将平太阳日分成24小时(1440分或86400秒),这就是现在通常使用的时间。至于因为地球自转不均匀,现在天文上使用更准确的历书时、力学时等问题,这里就不再介绍了。用日晷测得的时间是真太阳时。每日真太阳时和平太阳时之差称作时差。我们使用的钟表指示的是平太阳时。因为经度不同,各地太阳南中时刻并不相同。各地使用自己的地方时很不方便。为了国际交往和社会活动,一个国家或地区往往使用统一的时间,这种时间称区时。各地方时、区时指的都是平太阳时。各地方时经过时差改正可得当地真太阳时。同样由日晷测得真太阳时经时差改正即得当地地方平时。平时和真太阳时的问题就说到这里。有兴趣的读者可参看有关介绍天文知识的论著。

太阳每天总在真太阳时12^h左右中天。但每天晚上同一时间,例如20^h,注意星空,连续多日观察,就会发现,原本南中的星辰,过几天就偏西了。换句话说,就是某颗恒星,例如大火(心宿二,天蝎座α)连续两次南中的时间间隔不是一平太阳日,而比它要短约3^m56^s。即,我们看到的恒星星空旋转一周的时间,比太阳平均要短3^m56^s。看到的恒星星空旋转一周的时间天文学称作恒

星日。将恒星日分成24、1440、86400份,就得到恒星时、分、秒。通常说昼夜是由地球自转一周形成的。这种说法不错但不很准确。实际上,地球自转一周的时间,即星空天穹视转一周的时间,为一恒星日。太阳视转一周,即连续两次南中的时间才是一昼夜,就是通常所说的一天。平太阳日分为平太阳时分秒。平太阳日比恒星日长 $3^{m}56^{s}$,所以恒星日长度为 $23^{h}56^{m}04^{s}$ 平太阳时。平太阳时是以太阳视运动来标示的。恒星时应选一恒星的视运动来反映。天文上选取春分点的视运动作为恒星日、恒星时的标准。恒星日由春分点南中时刻开始计算。天文学上恒星日的定义为,春分点连续两次过南天子午线(南中、上中天)的时间间隔。春分点的时角以时分秒表示叫作恒星时。

春分点是天赤道和天黄道的两交点之一。太阳通过此点由赤道南进入赤道北,称之为升交点。春分点不是星象,在星空中没有标志。只有通过太阳,人们才会对春分点的位置有点感性知识。定气春分那一天,尤其是交春分那一时刻,太阳中心正好位于春分点。春分之日太阳在天空的位置就是春分点的所在。是日太阳几乎与春分点同时升没、同时南中。恒星时是自春分点南中时刻为 0^{h},开始计数。所以,春分日正午恒星时约当 0^{h},而在子夜近于 12^{h}。夏至时,太阳在春分点东面 90°,太阳的黄道度、赤道度悉为 $90^{\circ}(6^{h})$。这一天正午时,春分点距子午线 90°。春分点南中时恒星时为 0^{h}。春分点的时圈与南子午圈的交角,为春分点的时角,用时分秒来表示称作恒星时。夏至日正午时,春分点的时角约为 90°,即恒星时约 6^{h}。时角自子午圈向西计量。夏至日子夜时,太阳正在下中天(过北子午线),太阳的时角(过太阳的时圈即赤经圈与南子午圈的交角)为 180°,春分点又在太阳西面 90°,即春分点的时角为 270°,所以夏至日子夜的恒星时约为 18^{h}。秋分时,太阳位于黄赤道的降交点(又称秋分点),与春分点正好相

距180°。这天正午太阳的时角为0°，春分点的时角为180°，恒星时为12^h；子夜时太阳时角为180°，春分点的时角为360°，即0°。也就是秋分日子夜时春分点约当上中天，恒星时约为0^h。冬至时，太阳在黄道上春分点西90°，春分点的时角比太阳大270°。这一天正午时，春分点的时角约为270°，恒星时18^h；子夜时，春分点时角约为90°，恒星时约6^h。

视太阳在黄道上运行，太阳中心连续两次经过春分点的时间间隔，称作回归年。回归年长度略有变化，大约每1000年减少0.00006日。现在回归年长365.2422日，东汉时约长365.2423日。就是说，在一回归年中，人们看起来太阳转了365.2422圈。在这个时间里太阳在星空中自西向东运行了一周（这里暂不谈因地轴进动春分点在恒星星空每年向西约$50''.2$的岁差运动）。所以在一个回归年中，我们看到的恒星星空转动了366.2422圈，比太阳多转了1周。因此有：

365.2422平太阳日＝366.2422恒星日

1平太阳日＝366.2422/365.2422＝1.002783恒星日

1恒星日＝365.2422/366.2422＝0.997270平太阳日

1平太阳日＝1恒星日＋$3^m56^s.56$恒星时

1恒星日＝1平太阳日－$3^m55^s.91$平太阳时

恒星时间隔＝平时间隔（1＋1/365.2422）

平时间隔＝恒星时间隔（1－1/366.2422）

根据前面所述和上列关系，可以求出任何平时时刻相应的恒星时时刻或反之。简单地说，知道了二分二至子夜正午的恒星时，依每天子夜的恒星时增加约4^m，每月增加约2^h，平太阳时每6^h相当于恒星时6^h1^m的时间间隔，可以求出任何时刻相对应的恒星时的大致时刻。

这里比较详细地介绍了恒星时和平太阳时之间的关系，因为

讨论昏旦中星时要用到这些知识。另外，对于天文、历法爱好者和工作者能初步掌握平时、恒星时间的简单换算也很重要。因为使用望远镜观测，或一般夜晚看星、认星，都要根据恒星时才能知道它的方位、位置及能不能够找到它和看到它。

天体的赤经、黄经，都是以春分点作为量度的起点，自春分点自西向东计量(与时角方向相反)。前面说过，春分点在星空并无标志。只有通过太阳才能大致找到它。春分点的时角是恒星时。只有根据恒星观测才能精确测定它。

赤经就是通过天体(如恒星)的时圈和春分点的时圈(二分圈)在天极的交角。此角亦可沿着赤道量度从春分点到恒星赤经圈与赤道交点之间的弧长得出。春分点的时角为恒星时，而春分点无标志。在天球仪、天球图上很容易看出，恒星时 s 等于任一恒星的时角 t 与该星赤经 α 之和，即

$$\text{恒星时 } s=\text{恒星时角 } t+\text{恒星赤经 } \alpha$$

前面已介绍过，时角是通过恒星的赤经圈(时圈)与子午圈在天极的交角。以南子午圈为量度时角的起点，向西量度自 0°到 360°。如果恒星在子午圈之东，时角大于 180°。由 $s=t+\alpha$ 知，当恒星南中时，时角 t 为 0，所以上式变成 $s=\alpha$。即，恒星时等于正在南中(上中天)的恒星的赤经。这是一个非常重要的概念。要测定任何时刻的准确恒星时，要用中星仪观测其时正在南中之星。查出该恒星的赤经即为观测时间的恒星时。

所以昏、旦中星星度，实际上就是昏、明时刻的恒星时。赤经等于该恒星时的恒星，此时一定正好位于观测者所在地的南天子午线上。前面介绍了根据二分二至子夜和正午的恒星时刻计算一年中任何一天、任何时刻的恒星时的方法。求二十四气日期的昏明时刻(日出前 2.5 刻、日没后 2.5 刻)对应的恒星时，就可以得出其时南中的星宿或星度，即得表列的昏、旦中星星度。具体

计算时，要注意两点。一是中国历度 365.25 度与 360°的换算，二是赤经是自春分点向东量度（恒星时是春分点的时角，时角是自南天子午线向西量度的），而中国历法赤道宿度都是自冬至点起算向东计量的。冬至点在春分点西面 90°（中国历度 91.32 度）。搞清楚这两点，才能正确算出二十四气或任何一天的昏旦中星的赤经度数，及与之相对应的中国二十八宿的赤道宿度。四分历及其他历法中列出的二十八宿赤道宿度只给出自斗宿开始的各宿距星之间的距度。只在术文内、晷漏表或在推日月所在度法中才给出冬至日所在赤道度。知道了冬至赤道日度，才能知春分点的赤道日度，化为 360°制，再依上述方法可以求出任意日期的昏旦中星星度。

上面介绍了什么是恒星时、昏旦中星，昏旦中星和恒星时、恒星赤经之间的关系，昏旦中星的计算以及将它换算成赤道宿度的方法。

子夜到次日子夜，正午至次日正午历时 100 刻。夜半至明为半夜刻，正午至昏为半昼刻。一昼一夜（百刻）太阳行天一周，谓之天度 365.25 度。因此

$$
\begin{aligned}
\text{昏时太阳距午度} &= \text{天度} \times \text{半昼漏刻}/100 \\
&= \text{全天度} \times \text{昼漏}/200
\end{aligned}
$$

$$
\text{夜漏} = 100 - \text{昼漏}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{明时太阳距午度} &= \text{周天度} - \text{昏时太阳距午度} \\
&= \text{周天度} - \text{周天度} \times \text{昼漏}/200 \\
&= \text{天度}(1 - \text{昼漏}/200) \\
&= \text{周天度} \times \frac{200 - \text{昼漏}}{200}
\end{aligned}
$$

昏、明太阳距午度就是前面介绍的太阳的时角，自南天子午线向西计量，所以昏时太阳距午度总小于半周天，明时太阳距午度总在半周天以上。

前面说过，不考虑岁差（东汉时尚不识岁差），太阳在一回归

年时间里在星空自西向东运行一周，每天东移 1 度。因此，昏明时太阳距午度中，需考虑自夜半至昏、夜半至明太阳东移度数。

夜半至明日东行度数＝1 度×半夜漏/100

＝夜漏/200(度)

因为，

昏刻＝100－半夜漏刻

所以，

夜半至昏日东行度数＝1 度×(100－半夜漏)÷100

＝(200－夜漏)/200

故，

$$明时太阳距午度＝天度\times\frac{200-昼刻}{200}+\frac{夜刻}{200}$$

＝[天度(200－昼刻)＋夜漏刻]/200

＝天度－(天度×昼漏刻－夜漏刻)/200

$$昏时太阳距午度＝天度\times\frac{昼漏}{200}+\frac{(200-夜漏)}{200}$$

＝[天度×昼漏＋200－夜漏]/200

＝(天度×昼漏－夜漏)/200＋1

四分历称(天度×昼漏－夜漏)/200 为定度，故

明时太阳距午度＝天度－定度

昏时太阳距午度＝定度＋1

明中星＝其日太阳赤道日度＋明时日距午度

昏中星＝其日太阳赤道日度＋昏时日距午度

例如，冬至日所在赤道度斗 21.25 度，黄道度斗 19.25 度，根据四分历二十八宿赤道宿度，则

昏中星＝斗 21.25＋(365.25×45－55)/200＋1

＝斗 21.25＋81.90625＋1＝斗 104.15625

$$＝奎\ 5.90625\approx奎\ 5\frac{11}{12}＝奎\ 6\ 弱$$

$$\text{旦中星}=\text{斗}\ 21.25+365.25-\text{定度}\ 81.90625$$
$$=\text{斗}\ 304.59375$$
$$=\text{亢}\ 2.34375\approx\text{亢}\ 2\frac{4}{12}=\text{亢 2 少强}$$

再如，秋分日所在赤道度为角 4 度 30 分（$4\frac{30}{32}$度），由上式可得

$$\text{昏中星}=\text{角}\ 4.9375+\text{定度}+1$$
$$=\text{角}\ 4.9375+(365.25\times55.2-44.8)/200+1$$
$$=\text{角}\ 106.5225=\text{牛}\ 5.2725\approx\text{牛}\ 5\frac{3}{12}\text{度}=\text{牛 5 少}$$
$$\text{旦中星}=\text{角}\ 4.9375+365.25-\frac{365.25\times55.2-44.8}{200}$$
$$=\text{角}\ 4.9375+\text{天度}-\text{定度}$$
$$=\text{角}\ 4.9375+365.25-100.585$$
$$=\text{角}\ 269.6025\approx\text{井}\ 16\frac{4}{12}=\text{井 16 少强}$$

由这种方法可以计算得出四分历晷漏表二十四气各气的昏、旦中星星度。推昏明太阳距午度，四分历步晷漏术文是这样说的：

> 昏明之生，以天度（365.25）乘昼漏，夜漏减之，二百而一，为定度。以减天度，余为明；加定度一为昏。

即上面所述的方法。将昏明距午度与日所在度（奇零部分皆化为 12 分制）相加，得昏旦中星星度。

四分历将 1 度分作 12 份。做法是："其余四之，如法为少，二为半，三为太；不尽，三之，如法为强，余半法以上成强。强三为少，少四为度，其强二为少弱也。"12 分度制名称关系列于表 5－7。

表 5—7　四分历 12 分度制名称

名称	分数	小数	名称	分数	小数
度强	1/12	0.0833	半强	7/12	0.5833
少弱	2/12	0.1667	太弱	8/12	0.6667
少	3/12	0.25	太	9/12	0.75
少强	4/12	0.3333	太强	10/12	0.8333
半弱	5/12	0.4167	度弱	11/12	0.9167
半	6/12	0.50	度	12/12	1.0000

依照上述方法，推算得到的四分历晷漏表各气的昏旦中星星度，是基于视晷漏表各气日所在为子夜太阳所处的赤道日度得出的。但晷漏表所列二十四气日所在度并非子夜时，而为交平气时刻之赤道日度。因太阳每日东移 1 度。当所求节气交气时刻不为夜半时，就需在所求节气表列昏旦中星星度中减去交气小余时刻对应的太阳东移度数，方得小余不为零时平气昏旦中星定度。为此需将节气小余（即日的奇零部分）化为 12 分度，以减节气昏旦中星。

四分历记载，在元和二年（85）至永元元年（89），五岁中课日行及冬至，得到太阳冬至在斗 21.25 度。在永元前后，贾逵曾测过二十八宿的黄道宿度。至永元十五年（103）七月甲辰，和帝诏书造太史黄道铜仪对二十八宿黄道宿度做了正式测定和验证。这是历史上最早的二十八宿的黄道宿度数值。四分历对赤道宿度并未重新测定，仍采用西汉宿度。只不过因测得冬至日在斗 21.25 度，而将奇零部分移到斗宿而已。

晷漏表二十四气日所在首次给出赤道、黄道宿度。它们都是根据冬至日度累加平气长度 $15\frac{7}{32}$度（太阳日行 1 度）分别按二十八宿黄赤道宿度计数得出，而不是实测的数据。算法如下：

$$\text{各气赤道日度} = \text{斗 } 21.25 + \text{距冬至节气数} \times 15\frac{7}{32}$$

$$各气黄道日度=斗19.25+距冬至节气数\times15\frac{7}{32}$$

如

$$春分赤道日度=斗21.25+6\times15\frac{7}{32}$$
$$=斗21.25+91.3125=斗112.5625度$$
$$=斗112.5625-北方七宿赤道度98.25$$
$$=奎14\frac{10}{32}度$$

$$春分黄道日度=斗19.25+6\times15\frac{7}{32}$$
$$=斗110.5625$$
$$=斗110.5625-北方七宿黄道度96.25$$
$$=奎14\frac{10}{32}度$$

$$芒种赤道日度=斗21.25+11\times15\frac{7}{32}$$
$$=斗188.65625$$
$$=井10.40625=井10\frac{13}{32}度$$

$$芒种黄道日度=斗19.25+11\times15\frac{7}{32}$$
$$=斗186.65625$$
$$=斗186.65625-北方七宿96.25$$
$$-西方七宿83$$
$$=井7.40625=井7\frac{13}{32}度$$

四分历赤道二十八宿宿度表给出黄赤道度变换的进退度数。因此，算出二十四气昏旦中星的赤道星度，加减进退度数，即得黄道星度。

四分历给出的黄道宿度，是过二十八宿距星的时圈(赤经圈)

与黄道交点之间的距弧。过距星所作黄经圈与黄道相交点之间的距弧为二十八宿黄经差。前者与此不同。所以四分历黄道宿度并非黄经差,而是极黄经差。真黄经与极黄经,对于在黄道上或黄道附近的星差别不大。对于距黄道比较远的星,可能有7°～8°之差。日月五星的轨道虽都在黄道附近,但历法上总以入宿度描述它们的位置和运动。二十八宿的距星有些距黄道较远,如室、壁、奎、觜、参、柳、星、张、翼、轸等。对于古代天象位置的记载,考查时不要忘记这一点。如直接把它当作黄经差来进行分析,往往不易得出正确可靠的结果。

四分历元和年间测定的冬至赤道日度和永元得出的冬至黄道日度与天都有 2°多的误差。表 5—8 给出四分历二十四气黄赤道日度与元和二年(85)真实二十四气黄赤道太阳的宿度数值,并列出二十八宿距星的黄经、极黄经值以及它们的比较。以便对四分历日所在黄赤道度合天情况及黄经、极黄经的差别有点定量概念。

第四节　步中朔、日月度及月食

一、步中朔、日月度

东汉四分历与古六历俱为四分术,虽上元各不相同,但步中朔的方法是一样的。推算出所求年入何蔀及入蔀之年,根据第三章介绍的方法可很方便地得出冬至干支、平月龄以及天正平朔干支大小余。各月朔弦望、各气皆可递加各朔弦望气长度而得。冬至平月龄即各岁闰余,闰余大于等于 12$\left(\frac{12}{19}\text{月}, 18\frac{612}{940}\text{日}\right)$之岁,其年有闰。当闰何月,可由冬至平月龄累加 $\frac{1}{12}\times 10\frac{827}{940}=852\frac{1}{4}/940$日,其和满朔策 $29\frac{499}{940}$之月,即为闰月。

表 5—8　四分历二十四气黄赤道日度，真气黄道日度和元和二年(85)二十八宿距星的赤经、黄经、极黄经度

节气	赤道(度)	日度(°)	黄道(度)	日度(°)	真气黄道日度(°)	距星赤经 α(°)	距星黄经 λ(°)	距星极黄经 λ′(°)	λ－λ′(°)
冬至	斗 21.25	20.945	斗 19.25	18.973	斗 16.486	斗 251.581	253.514	253.037	0.477
小寒	女 2.21875	2.187	女 3.21875	3.172	牛 7.597	女 285.448	285.101	284.204	0.897
大寒	虚 5.4375	5.359	虚 7.4375	7.331	虚 3.218	虚 297.127	296.782	295.138	1.644
立春	危 10.65625	10.503	危 12.65625	12.474	危 8.248	危 306.446	306.752	304.074	2.678
雨水	室 8.875	8.747	室 11.875	11.704	室 3.085	室 322.543	326.915	320.088	6.827
惊蛰	壁 8.09375	7.977	壁 9.09375	8.963	壁 2.426	壁 339.132	342.574	337.401	5.173
春分	奎 14.3125	14.107	奎 14.3125	14.107	奎 5.912	奎 347.453	354.088	346.342	7.746
清明	胃 1.53125	1.509	胃 0.53125	0.524	娄 7.664	胃 14.305	20.332	15.557	4.775
谷雨	昴 2.75	2.71	昴 0.75	0.739	胃 9.668	昴 29.088	32.781	31.275	1.506
立夏	毕 6.96875	6.868	毕 3.96875	3.912	毕 3.228	毕 40.166	41.772	42.662	—0.89
小满	参 4.1875	4.127	参 0.1875	0.185	参 4.285	参 58.900	55.715	61.079	—5.364
芒种	井 10.40625	10.257	井 7.40625	7.300	井 6.365	井 67.041	68.635	68.794	—0.159
夏至	井 25.625	25.257	井 22.625	22.300	井 21.365	鬼 99.870	99.117	99.054	0.063

续表

节气	赤道（度）	日度（°）	黄道（度）	日度（°）	真气黄道日度（°）	距星赤经 α（°）	距星黄经 λ（°）	距星极黄经 λ′（°）	λ—λ′（°）
小暑	柳 3.84375	3.789	柳 3.84375	3.789	柳 1.259	柳 103.690	103.741	102.577	1.164
大暑	星 4.0625	4.004	星 5.0625	4.990	柳 16.259	星 118.194	120.396	116.150	4.246
立秋	张 12.28125	12.105	张 13.28125	13.090	张 5.848	张 124.827	129.152	122.505	6.647
处暑	翼 9.5	9.363	翼 11.5	11.335	翼 2.570	翼 141.890	147.430	139.423	8.007
白露	轸 6.71875	6.622	轸 7.71875	7.608	轸 0.761	轸 159.905	164.239	158.226	6.013
秋分	角 4.9375	4.867	角 4.9375	4.867	角 2.771	角 176.687	177.229	176.384	0.845
寒露	亢 8.15625	8.039	亢 7.15625	7.053	亢 7.129	亢 188.403	187.871	189.162	−1.291
霜降	氐 14.375	14.168	氐 12.375	12.197	氐 11.293	氐 197.243	198.707	198.720	−0.013
立冬	尾 4.59375	4.528	尾 1.59375	1.571	心 3.826	尾 222.177	229.539	224.689	4.85
小雪	箕 1.8125	1.786	尾 16.8125	15.571	尾 10.461	箕 241.266	244.653	243.336	1.317
大雪	斗 6.03125	5.945	斗 4.03125	3.973	斗 1.486	娄 3.315	7.336	3.619	3.717
						牛 277.789	277.403	277.141	0.262
						觜 57.877	56.965	60.099	−3.134
						房 212.106	216.318	214.414	1.904
						心 217.437	221.174	219.892	1.282

后汉四分历术文介绍的推步方法如下。

(一)推天正朔日

$$(\text{入蔀年}-1)\times\text{章月}\ 235/\text{章法}=\text{积月}\frac{\text{闰余}}{19}$$

闰余在 12 以上,其岁有闰。

$$\text{积月}\times\text{蔀日}\ 27759/\text{蔀月}\ 940=\text{积日}\frac{\text{小余}}{940}$$

$$\text{年前天正朔大小余}=\left[\left(\frac{\text{积月}\times\text{蔀日}}{\text{蔀月}}\right)/60\right]_R$$

R 为求余计算,即其方括号内算式的余数。

四分历每岁 365.25 日,比 12 个朔望月长 7/19 月。故闰余每年增加 7,闰余大于 12 之岁,其年有闰。遇闰年,闰余加 7 后减 19。这样可很容易得出一蔀 76 年,每年的闰余值。求出闰余,天正平朔大小余也可由下式算出。

天正经朔大小余

$$=\left[\frac{(\text{大周}\ 343335\times\text{入蔀年}-\text{周天}\ 1461\times\text{闰余})}{940}/60\right]_R$$

$$=\left\{\left[\frac{1461\times(235\times\text{入蔀年}-\text{闰余})}{940}\right]/60\right\}_R$$

得出天正经朔后,递加朔策大余 29,小余 499,得各月经朔,小余满蔀法 940 得 1,进为大余。各朔小余大于 441 者,其月大。经朔大小余,加大余 7,小余 $359\frac{3}{4}$,得上弦。又加得望、下弦及次月朔。小余满 940 皆进为大余。$7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$为$\frac{1}{4}$朔望月长,即$\frac{1}{4}\times 29\frac{499}{940}=7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$日。

(二)推天正冬至和二十四气

天正冬至大小余

$$=\left\{\left[\frac{(\text{入蔀年}-1)\times\text{日余}\ 168}{\text{中法}\ 32}\right]/60\right\}_R$$

$$=\{[(\text{入蔀年}-1)\times\text{没法}\ 21/\text{日法}\ 4]/60\}_R$$

累加气策 $15\frac{7}{32}$日(中节长度$=365\frac{1}{4}/24$)得二十四气各气大小余,小余满 32,进位从大余。

以上所得大余,皆以所入蔀名命之,算外(即蔀名干支不计入),得天正朔、冬至干支纪日。

(三)推闰月所在

闰余大于 12 之岁,其年有闰,闰在何月,以下式求之:

$$\text{闰月}=12\times(\text{章法}\ 19-\text{闰余})/\text{章闰}\ 7$$

余数大于等于 4 进位,自年前天正月起算,天正月不计入,所得即为闰月所在。这与前面所述,闰余累加 852.25/940 日,加满朔策 29+499/940 之月,即为闰月,结果是一致的。

(四)推合朔日月所在度

$$\text{天度}=\text{大周}\ 343335/\text{蔀月}\ 940$$

度法 940。

$$\left[\frac{\text{入蔀积日}\times\text{蔀月}\ 940}{\text{大周}\ 343335}\right]_R/\text{蔀月}\ 940=\text{积度}\frac{\text{余分}}{940}$$

$$\text{合朔所在度}=\text{冬至赤道日度斗}\ 21\frac{235}{940}+\text{积度}$$

以赤道宿度去之,至不满宿为日月合朔所在星度。也可由下式得出:

天正经朔所在度

$$=斗\ 21\frac{235}{940}+\frac{大周\ 343335-闰余\times周天\ 1461}{蔀法\ 940}$$

加度 29,加分 499,分满蔀月 940 得度,为次月朔星度。累加,得各月平朔星度。以赤道宿度去之,如经斗宿除 235 分。

(五)夜半日所在宿度

夜半日所在宿度

$$=斗\ 21\frac{19}{76}+\left[\frac{入蔀积日\times蔀法\ 76}{蔀日\ 27759}\right]_R/76$$

加 1 度得次日,累加得各日。以宿次除去之,得各日夜半日所在宿度,如经斗除 19 分。

夜半日所在赤道度,也可由下式得出:

夜半赤道日度=合朔度分-朔小余

合朔度分、朔小余皆以蔀月为度法,要化与前式一样,以蔀法 76 为度法,其分以 235 约之,19 乘之即得。

(六)推月所在度

$$\left[\frac{入蔀积日\times月周\ 1016}{蔀日\ 27759}\right]_R/蔀法\ 76=积度+\frac{余分}{76}$$

月每日行度=月周 1016/蔀法 76=13 $\frac{28}{76}$度

所求日夜半月所在度=斗 21 $\frac{19}{76}$+积度$\frac{余分}{76}$

加 13 $\frac{28}{76}$度为次日夜半月所在赤道度,累加得各日。30 日月行 30×1016/76=30480/76 度=401 $\frac{4}{76}$度,除全天度 365 $\frac{19}{76}$,得 35 $\frac{61}{76}$度。29 日月行 29×1016/76=387 $\frac{52}{76}$,除全天度 365 $\frac{19}{76}$,得

22$\frac{33}{76}$度。如本月为大月30日，则加35度61分，如为小月，加22度33分为次月夜半月所在赤道度。分满蔀法76得1度。所得夜半月所在度，以赤道宿次除之，至不满宿，为夜半月所在赤道宿度。

（七）推昏明日所入度

上节对昏、明时刻已做详细介绍。

夜半至明日所行分＝其月节气夜漏刻×蔀法/200

明时日所在度分＝夜半赤道日度分＋夜半至明时日所行分

夜半至昏日所行分＝蔀法－夜半至明时日所行分

昏时日所在度分＝夜半日所在度分＋夜半至昏日所行分

（八）昏明月所入度分

明积分＝其节气夜漏刻×月周1016/200

月明时所在度＝夜半月度＋明积分

昏积分＝月周1016－明积分

昏时月所在度＝夜半月度＋昏积分

昏、明积分满蔀法76进度。

二、推月食术

四分历“历法”说，“当汉高皇帝受命四十有五岁，阳在上章，阴在执徐，冬十有一月甲子夜半朔旦冬至，日月闰积之数皆自此始，立元正朔，谓之汉历。又上两元，而月食五星之元，并发端焉。”因此计算历朔，可采用四分历仲纪之元庚辰岁（前161）为甲子蔀首，入算甚便。而计算月食五星，通常还需自上元起算。四分历上元，《续汉志》“汉安论历”记载，太史令虞恭、治历宗䜣等议：四分历仲纪之元，起于孝文皇帝后元三年，岁在庚辰。上四十

五岁，岁在乙未，则汉兴元年也。又上二百七十五岁，岁在庚申，则孔子获麟。二百七十六万岁，寻之上行，复得庚申。岁岁相承，从下寻上，其执不误。此四分历元明文图谶所著也。

由此可知，四分历上元为获麟前276万岁庚申。下距仲纪之元庚辰（前161）为2760320年。即文帝后元三年庚辰入元2760320年。

（一）推月食所入蔀会年

$$r=[\text{上元积年}/\text{元会}\ 41040]_R$$

$$\text{入蔀会年}=[r/\text{蔀会}\ 2052]_R$$

四分历仲纪之元庚辰（前161）积年2760320，r为10640，入蔀会年为380；元帝初元二年甲戌（前47）上元积年2760434，r为10754，入蔀会年为494；成帝河平元年癸巳（前28）入元2760453，r为10773，入蔀会年为513。

（二）岁前天正月前食月及后食

$$(\text{入蔀会年}-1)\times\frac{\text{食数}\ 1081}{\text{岁数}\ 513}=\text{积食}\frac{\text{食余}}{513}$$

$$\text{月数}\ 135\times\text{积食}/\text{食法}\ 23=\text{积月}\frac{\text{月余分}}{23}$$

$$\text{入章月数}=[\text{积月}/\text{章月}\ 235]_R$$

$$\text{入章闰数}=\text{入章月数}\times\text{章闰}\ 7/\text{章月}\ 235$$

$$\text{年前天正月前食月}=[(\text{入章月}-\text{入章闰})/12]_R$$

入章月数“先除入章闰，以12除去之，不满（12）者，命以十一月，算尽之外，则前年十一月前食月也”。

$$\text{后食}=\text{天正月前食月及分}+5\frac{20}{23}\text{月}$$

分满食法23，进为月数。

(三)推食月朔日、食日、后食朔及日

$$食月朔日大小余=\left[\left(食积月\times 29\frac{499}{940}\right)/60\right]_R$$

所得余数,以所求年所入蔀会名命之,算尽之外(蔀会名不计),即得年前天正前食月朔日干支。

$$食日=食月朔日大小余+14\frac{719\frac{1}{2}}{940}$$

小余满蔀月940为大余。

四分历推月食法同三统。皆以135月有23食为率。故得$5\frac{20}{23}$月而一食。月策$29\frac{499}{940}$,5个月共计$5\times 29\frac{499}{940}=147\frac{615}{940}$日,减两个干支周期120,为$27\frac{615}{940}$日。故求后食朔及日皆由前食朔、食日加$27\frac{615}{940}$而得。若所得月余分不满20者,再加1月($29\frac{499}{940}$日),即相距6月而食(因食间距$5\frac{20}{23}$月)。

(四)天正后食

$$余年=[上元积年/岁数513]_R$$

$$章月235\times余年/章法19=积月+闰余/19$$

$$天正后食=[(积月\times 112)/月数135]_R/23=月数\frac{余分}{23}$$

月数自天正月起算(十一月不计入)得食月及余分。

推天正前食月和天正后食月方法是等效的。推天正后食月似更直观、简便。求天正前食月术,可以得出食月朔日、食日干支。由历表和食典可直接查出食月的位置、所对应的中历、西历月日及合天情况。所以用周期法推算月食,最好将两者结合

起来。

四分历步月食推食月朔日、食日干支要注意命算为所会蔀名。术文是这样说的，推月食所入蔀会年，以元会 41040 除去上元，其余以蔀会 2050 除之，所得以 27 乘之，满 60 除去之，余以 20 除所得数，从天纪，算外，所入纪。不满 20 者，数从甲子蔀起，算外，所入蔀会也。其初不满蔀会者，入蔀会年数也。四分历元 4560 年，年名、日名 4560 年后才又回复。纪 1520 年，至朔日名 20 蔀 1520 年方可复原。一纪后岁名移后 20，三纪后复初。后汉四分历上元甲子为庚申。三纪岁名各为庚申、庚辰、庚子，称孟、仲、季纪。庚辰仲纪为后汉所当之纪又称天纪。仲纪之元庚辰岁入庚辰天纪首蔀首年。由纪名可求入纪任一年的岁名。实际上要求任一年太岁所在（岁名、纪年干支），只需以 60 除去所求年距元，余数以历元岁名命之，算外，即得。距元年如为上元积年，余数从庚申（上元甲子）数起，算外（庚申不计入），得所求年纪年干支。如为距仲纪之元的积年，则余数从庚辰（仲纪之元岁名）数起，算外即得。上述推纪年方法可写成下式：

$$所求年岁名=庚申+[上元积年/60]_R$$
$$=庚辰+[距仲纪之元年数/60]_R$$

如四分历仲纪之元，文帝后元三年庚辰岁（前 161）距上元 2760320 年，以元会 41040 除去，所余 10640，以蔀会 2052 除之，得 $5\frac{380}{2052}$。所得 5 以 27 乘，满 60 除去，余 15 以 20 除，所得数从天纪，算外，所入纪。故庚辰岁入天纪。余 15，不满 20，数从甲子蔀起，甲子蔀不计入，得己酉蔀。为四分历仲纪之元庚辰岁所入蔀会。推月食食月朔日、食日干支，皆以所会蔀名命之。即悉从己酉数起，算尽之外（己酉不计）即得。前面得出的不满蔀会之年 380，为入蔀会年数。

再如四分历颁行之元和二年（85）和定晷仪众数的熹平三年

(174)上元积年分别为2760565、2760654,依上式得其岁名分别为乙酉和甲寅。以元会除去上元,其余以蔀会除之,分别得5 $\frac{625}{2052}$和5 $\frac{714}{2052}$。625和714为各自入蔀会年。得数5乘27,满60去之,余15,入天纪及所入蔀会己酉同仲纪之元。

三、交食周期

中国自古重视交食观测。《尚书》记有夏仲康发生的日食。《诗经》描述了十月之交、朔月辛卯、日有食之的情景。《春秋》保存了鲁国242年间37次大食分的日食记录。在殷墟出土的甲骨卜辞中已发现五次有干支纪日的月食验辞记载。日月食是经常发生的天象。月食几乎每年都可看到。就一个地区而言平均二三年也可看到一次日食。日月食的计算、预报比较复杂。早期主要靠周期方法来预报它。记载的最早最著名的日食预报是希腊人泰勒斯利用223月周期方法报准了公元前585年5月28日发生于小亚细亚地区的一次日食,从而结束了一场部落之间的战争。在中国,西汉文献中出现了交食周期的记载。《史记·天官书》谓,月食凡百一十三月而复始(书中有关周期数字有错讹)。《汉书·刘向传》有"率三岁五月有奇而一食"之话。刘歆三统历明确以135月有23交为法。其后王充论衡,"治期"、"说日"篇都谈到,大率四十一二月日一食,五六月月亦一食,月食先食东,日食先食西等有关交食周期方面的内容。

关于日食预报,作者查到东汉的韩说,曾准确预报了灵帝光和元年十月晦日的日食(178年11月27日)。可能是最早的成功记载。

四分历推月食周期之法与三统历同。三统历称135月为朔望之会,47个朔望之会为会月。会月6345适为27章。章19年,

会月为513岁的月数。章首合朔冬至同日。47会6345月为章月、朔望之会的最小公倍数，为交食复在朔旦冬至的循环周期。135月有23食，47会513岁有食1081。三统历推月食法似自上元起算。朔望之会135月，月食之既者，率23食而复既。会月6345，交食重起于冬至合朔之日。九会57105月为一元之月即4617岁，"九会而元复"，谓交食起于甲子朔旦冬至。太初元年岁前甲子朔旦冬至既是甲子元首、统首也是会月之始即日月交食之元。但实际上用它作月食周期推算的历元是不理想的。用它推算前104年到前18年的月食，无一例正确。在其后几十年中只能报出10%～20%。直到四分历颁行的元和、章和前后也仅能报准约1/3的月食。据研究很可能在西汉并未采用这个月食历元。《续汉书》记载，永平五年(62)官历署七月十六日月食(62年9月7日丙午晚月食2/3，实为时历十五日前半夜)。这次月食按太初历元推算应为六月望日。是时官历推算月食是依太初元年岁前冬至后一月为历元，故才能与天象基本相符。

四分历采用与三统相同的月食周期。但它重视历元的选择，并给出了比较完整的推步方法。因135月23交本身的局限，四分历步月食虽经数次历元调整仍时有差错，但比三统有进步。

日食总发生在朔日，月食必出现于望时。古人很早就认识了这个关系，并用以检验历法的朔望。日月食发生在朔望，但并非每个朔望都有交食。这是因为月行的白道与日行的黄道不在一个平面上，而有5°9′的交角。白道、黄道在天球上有两个交点。月球由黄道南移到黄道北所经过的那个点叫升交点；与它相对，即月球由黄道北进入黄道南所穿过之点，称作降交点。月球在白道运行每天约13°.2，走到两交点中间时，离黄道最远，为5°9′。太阳、月亮视直径为半度左右。只有当朔望时日月位于交点之一附近时，才会有日月食发生。大多数朔望时，月亮位于黄道的北

或南面距黄道 1°以外的地方，而不发生日月食。

月亮绕地球公转，地球是吸引月球的中心物体，而太阳是摄动物体。太阳质量为地球质量的 33 万倍。地月的质量比为 81.45。而地球和太阳的距离为地月距的 390 倍。根据牛顿的万有引力定律可得出，太阳对月亮的引力约为地球对月球引力的两倍。但影响月亮绕地运动的力量不是太阳的吸引力而是对月、地引力之差，即摄动力。月球运动的摄动力可达中心物体吸引力的 1/90。摄动力与引力不同，它不是和摄动物体的距离平方，而是和它的立方成反比。实际摄动力并不在月轨平面，而在含日地月球中心的平面内。因而在与轨道面正交的方向有一法向分量。摄动的法向分量使轨道面围绕月地心连线旋转，因而引起黄白交角和升交点的位置改变。由于太阳摄动，月球轨道是在变化的。黄白交角以 173.31 天周期，有近 9′的半变幅；而黄白道的交点以 $-190''.77$ 的日平均速度在恒星间做长期逆行，周期为 18.60 年。月亮连续两次经过升交点的周期为交点月，它的长度为：

$$\text{交点月}=\frac{360^{\circ}}{n'-v}$$

$$=\frac{1296000''}{47434''.891+190''.77}$$

$$=27.21222\ \text{日}$$

月亮的黄纬就按这个周期变化，它对日月食的计算、预报非常重要。

交点运动对月亮的赤经赤纬有很大影响。当升交点和春分点相合时，白道在黄赤交角之外，黄白倾角(5°9′)与黄赤交角(23°27′)相加。因此，白道与赤道的交角可能达到 28°36′。当降交点与春分点重合时，白道在黄道、赤道之间，这时白赤交角为 23°27′内减 5°9′，成 18°18′角。前面情况下，月亮赤纬在 1 个月内可从 −28°36′，变到 +28°36′，相差可达 57°多，后一种情况下，月

亮离赤道南北最远各为18°18′,它的赤纬变化只有36°36′。

当地球阴影投到月面上时发生月食,若地球处在月球阴影中时出现日食,这时月轮覆盖住日面的全部或一部。日月食时,月亮中心一定在日地两球的中心连线附近。也就是前面说过的,日月食一定发生在朔望,三者基本上在一个平面内。另外,食时月亮离黄道必须很近,即食时月亮黄纬必定很小,因此交食总发生在交点附近。月亮的升交距角 P 接近 0°或 180°。即发生日月食必须同时满足,月当朔望又处升降交点附近这两个条件。月亮连续两次经过升交点的时间间隔为交点月,时间为 27.21222 日。朔望月长 29.53059 日。两种月长度不一。要想知道交食发生的周期规律,必须找出 x 个朔望月长度与 y 个交点月有相同的长度。这样,某次交食后,经过 x 个朔望月或 y 个交点月才又同时满足上述交食的两个条件。要找 x、y,最好能求出交点月和朔望月的最小公倍数。由于朔望月、交点月和食年(视太阳连续两次经过升交点的时间间隔,交食年长度为 $\frac{1296000}{n-v}=\frac{1296000}{3548.193+190.77}=346.62003$ 日)之间不能公约。因此只能得出大致的近似关系。古代中国和西亚巴比仑都曾找出过相当不错的交食周期。其中最简便又精确的三种是 135,223,358 个朔望月周期。

经过 135、223、358 个朔望月,月亮、太阳和地球差不多恰好又回到上次交食发生时的相对位置,所以称它们为交食周期。用周期预报日月食,希望周期时间较短、关系简单、计算方便,更重要的是准确。可以找到更短的周期,如 41、88 个朔望月。前者与 44.5 个交点月、3.5 食年的长度相差无几;后者与 95.5 交点月、7.5 个食年的日数比较接近。但比上述三周期却粗疏多了。

135 朔望月 $=135\times29.530588=3986.6294$ 日

146.5 交点月＝146.5×27.212220＝3986.5902 日

11.5 交食年＝11.5×346.62003＝3986.1303 日

135 个朔望月比 146.5 交点月长 0.0392 日，比 3.5 个食年长 0.4991 日。月亮日行 47434″.89，135 朔望月后，月亮走过交点 1859″.45(0°.5165)。太阳日平行 3548″.193，135 月后太阳过另一交点后多走 0°.4919(1770″.90)。如果上次日食日月正好在升交点相会时发生，经过 135 个朔望月后，太阳、月亮再度相会时，日月已过降交点约 0°.5。即日食发生在降交点以东约 0°.5 的地方。因黄白交角仅 5°多，月亮黄纬变化很小，所以还会发生日食。

223 个朔望月比 19 个食年、242 个交点月分别约短 0.459446 日和 0.036116 日。经过 223 月周期后，太阳月亮相合时距离原来的交点分别还差 1630″.20(0°.453)和 1713″.16(0°.4759)，即日月在原交点以西约 0°.45 和 0°.48 之处。358 朔望月正好等于 135 月加 223 月。358 朔望月比 30.5 个食年、388.5 个交点月长 0.039589 日和 0.003034 日。如果上次日食正好发生在升交点，经过 358 月后，太阳月亮再度相合时，日月已过降交点分别为 140″.4694(0°.03902)和 143″.91746(0°.039977)。

135 月周期后太阳过交点 0°.49，经过 223 月周期，太阳不到交点 0°.45，358 月周期为 135 月和 223 月周期之和，358 月后，太阳过交点 0°.49－0°.45＝0°.04。同样，135 月周期后，月过交点 0°.52，经过 223 月，月亮不到交点 0°.48，所以经过 135 和 223 之和 358 月后，月过交点 0°.04。223 月与 242 交点月、19 交食年相近。过这个周期后，日月仍回到原始出发的交点。135 月和 146.5 交点月、11.5 食年长度相近，358 月与 388.5 交点月、30.5 食年日数相当，所以经过 135、358 月周期后，交食发生在另一个交点。如原先在升交点，经过 135 或 358 月，交食定发生在降交点附近。

这三个周期虽然比较准确，尤其358月周期。但这仍不能保证交食正确地重复出现。因为日行有盈缩月行有疾徐。尤其月亮运动极为复杂。它的轨道偏心率较大(0.055)，受到的摄动影响又很大，月亮运动可能偏离它的平均位置有时达7°之多。日月食只有日月处于朔望且位于交点附近才能发生。出现交食时日月距交点的最小距离(去交度)称作食限。日月去交大于18°绝不可能发生日食。太阳月亮的去交距角小于15°.48，必定出现日偏食，小于9°.46，一定发生日全食或日环食。月食的条件比日食苛刻一些。月日去交大于12°，绝不可能出现本影月食(全食和偏食)，去交小于9°.65，肯定发生月偏食，去交小于4°.3，一定会发生月全食。由于月行疾徐不一，有时不需最大偏离(近7°)就可以使食不再发生。因此，讨论交食周期，还应该考虑中心差，也就是日月距近地点不同角度的影响。如此，135月、358月的周期就不如223月更直观和可靠了。135朔望月约等于144.68个近点月，358朔望月约当383.67个近点月。经过135、358月周期，日月距交点虽恢复到先前位置附近，但距出发时月距近点的角度却相差较远，月偏离平均位置的情况有较大差异。说来也巧，223朔望月与239个近点月，仅差0.00785月(0.2163天)。223月后，不仅日月又回到原来的交点附近，月亮相对近地点的位置也相差无几。距先前的近点角只小10260″.17(2°.85)。同时，223月周期比18年仅长11日。因此太阳的平近点角与出发时的数据仅多38893″.66(10°.8)。故月亮、太阳真黄经与平黄经的差项，经过223个月周期只有很小变化。所以这个周期系列预报的日月食，除因日月逐渐西移远离交点，食分由小增大再由大变小超出食限外，在同一系列中日月食的演变情况是比较稳定的。135月周期约当10.915回归年，358月周期近为28.945年。分别比11、29年少31.05和20.09天。一周后太阳的平近点角要分别减少

110171″.30(30°.6)和 71283″.14(19°.8)。从日月平位置和真位置的关系而言,135 月和 358 月周期就不如 223 月周期了。因此,用 135、358 月周期预报的日月食的食分和有无就不如 223 月稳定可靠了。223 月的周期是基本满足规定月亮对于太阳和地球位置的四个参数,朔望月、交点月(食年)、近点月、近点年(365.2596 日或近似地以回归年 365.2422 日表示)的很近似的交食周期。

由于 223 朔望月周期稍小于 19 食年或 242 交点月,相当于每周后升交角距减少 0°.47。通常选取日月相合黄经位于交点以东 15°.5(对于日食)或 10°.5(月食)作为某一 223 月周期系列开始的位置。如是次日食发生在降交点之东,此时日食开始于地球南半球高纬度,经过 223 月周期,日月距降交点位置西移 0°.47,月亮位置逐渐北移,日月间角距缩小,食分增大,日食发生的位置逐渐北移。经过若干个 223 月周期,日月相合位置到达降交点。这时食分最大,食程最长。过了降交点,日月相合的位置就逐渐远离降交点,日月角距增大,食分减小,月亮阴影越来越向北极高纬地区移动,最终以北半球高纬地区的微食结束这一 223 月周期的日食系列。

如果 223 月周期系列日食开始于升交点的东侧 15°.5 附近、视日月圆面正好相切之时。和上面讨论类似,但月影移动的方向相反。日食一定以北半球的高纬度偏食开始而以南半球高纬度的偏食结束。系列开始时日月相会于升交点以东(已过升交点)。月轮切于日轮之北端,日月升交距角约为 15°.5。以后每过 223 月,日月相合时,距升交点近 0°.47,P(升交距角)和日月相距减小,食分增大,由偏食发展到全食。日月相会后退西行经过升交点后,日月升交距角由 0(日月相会于升交点时)而变为负值(由 360°而 359°、358°…),食分由大变小,日月相合位置逐渐西移,到合朔时升交距角减少到 344°.5 左右,月轮北端切于视太阳之南

端，以南极附近的微食结束。由食限和每 223 月周期后日月升交距角减少 $0^\circ.47$ 可以得出，一个 223 月周期系列日食大约历时可由下式得出概数：

$$\text{一系列日食历时(周期)} = \frac{2\times 15^\circ.5}{0^\circ.47} = 66 \text{ 个周期}$$

即 66 个 223 月或约计 1189.2 年。当然这仅是个概数。

四、135 月交食周期

汉代三统历、四分历都采用 135 月周期推算和预测月食。前面说过，135 月周期虽不及 223 月周期稳定，没有 358 月周期可靠，稍为逊色，但周期较短、计算方便，还算准确，仍不失为一种好的交食周期。

历法疏密，验在交食。推算交食的初始阶段，就是采用周期预测的方法。用周期推算日月食，要得到比较准确可靠的结果，首先需要有准确的周期；其次，周期内交食间隔安排要得当；第三，使用周期的起点（历元）要选好；第四，用来推算预报的时段要合适。

四分历沿袭三统历月食法，用 135 月周期。但它能较准确地预报月食，就是它能较好地处理上述几点要求。四分历推月食法较三统详尽。术文说，月食之既者，率 23 食而复既，其月 135，率之相除，得 $5\frac{20}{23}$月而一食。以除一岁之月，得岁有 $2\frac{55}{513}$食也。分统其法，因以与蔀相约，得 4 与 27，互之，会 2052，20 而与元会。

章月 235 与交食周期 135 的最小公倍数为 6345 月，适为 513 岁。它为 27 章、47 会（朔望之会 135 月）。27 蔀（27×76 年）与 4 岁数（4×513 年）相等为 2052 年，称蔀会。20 蔀会 41040 年为元会。513 岁（6345 月）、2052 岁（4×6345 月）、41040 岁（20×4×6345）都是交食周期 135 月的整倍数。135 月有 23 食。513 岁

(6345 月)为 47 会(47×135),共有 1081 食。

望日,又值日月运行到交点附近的时候,这时,月亮离黄道很近,黄纬很小,日地月几近在同一平面、同一直线上,会看到月食。月食时地球在日、月之间。地球背着太阳的一侧,因受不到阳光,会出现阴影。地球阴影分两部分,中间部分称本影,呈圆锥形。圆锥底的直径即地球直径。本影圆锥高度(圆锥长度)为 136 万～141 万千米。月亮距地球 35.7 万～40.7 万千米,平均 38.4 万千米。可以算出在月亮轨道附近,本影圆锥截面直径约为 9220 千米。本影没有受到太阳直射光,半影受到一部分直射的光。本影锥半顶角等于太阳的视角半径(约 16′)内减太阳的地平视差(约为 8″.8);半影锥半顶角等于太阳的视半径加太阳的地平视差。望时若日月在交点附近,月绕地公转如进入地影就发生月食。月球整个进入本影发生月全食;部分进入本影出现月偏食;如只进入半影,则为半影月食。月球在半影内月面亮度减弱很少,只有当月球深入半影接近本影时,肉眼才可能看出月球边缘变暗。这种情况古人有时可能称作薄食。月食时月亮在轨道上开始进入本影(月上切本影圆锥)及离开本影(月下切本影圆锥),在地球中心所张角之半,其值等于月亮地平视差(约 57′.3)与本影锥半顶角(约 15′51″)之差。而食时月在轨道上进出半影圆锥之上下切点,在地球中心所张之半角,其值与月亮地平视差与半影锥半顶角(约 16′9″)之和相当。月地平均距离为 384000 千米。由这些数据可大致得出在月亮所处的位置半影、本影圆锥的截面直径约为 16420 千米和 9260 千米。这只是粗略数值。真正在月食计算时还要考虑其他的因素。至此我们介绍了月食有三种类型:全食、偏食和半影食。全世界每年最多可发生 5 次日食,最少 2 次;而每年最多可出现 3 次本影月食,少则一次也没有。如计及半影月食,则每年至多发生 5 次,最少 2 次。每年发生 2 次本影月

食(全食、偏食)的机会最大,约为60%。每年发生的月食次数和月食种类很不相同。各类月食出现的平均分布情况如下:

月全食	0.7022次/年	占28.9%
月偏食	0.8396次/年	占34.5%
半影月食	0.8913次/年	占36.6%
月食总计	2.4331次/年	占100.0%

本影月食包括月全食和月偏食两类,是月球进入地球本影圆锥发生的。135月为10.915年。按上述月食的平均分布,135月周期内应发生7.66次全食,9.16次偏食,合计发生本影月食16.83次。另外还会出现9.73次半影月食。总计一个交食周期内共发生各类月食26.56次。这些数字是据多年月食的平均统计结果。在每个135月内会有一定摆动。但从平均结果来看,每135月交食周期内共发生各类月食26.56次。其中本影食仅16.83次。这是全世界范围内发生的月食。这些食中大约仅有60%,即约10次才能为中国所见。月食时只要月亮在地平线以上,我们都可以看见。月食总发生在望日。望日日没时月出,日出时月没。由于大气折射将地平线上的天体位置提高,再加上月食全过程时间较长,尤其全食和大食分月食持续时间可达3~4小时,可看到许多月带食出没的现象。所以在一个地区可以看到大约60%的本影月食。

由此看出,135月有23食,对于全世界发生的入限的各类月食而言,数目不足;对于本影月食来说,食数偏大;如果指中国可见的月食,它就太大了。以后的讨论中会看到,只要历元、时段选择适当,用135月周期预报本影月食在一定时期内可以一个不漏。但也会出现虚报,因为半影月食,尤其半影食分不足0.7者,肉眼无法看到。故以下的考查中,只讨论本影月食。

前面说过,135月交食周期是较好的周期之一。月食之既者,

至此而复既。我们选取了明帝永平至灵帝熹平、光和百余年中的8组月食，列于表5—9，考查经历10次135月周期后，月食食分及月亮升交距角 P 的变化情况。总的说来，升交距角是在增大。平均每个周期后，食时月距交点东移约 $0^\circ.5$。10个周期后，小者 P（月亮升交距角）增加 3°，如 E 组；多者增加 $7^\circ \sim 8^\circ$，如 D、F 组；一般增大 $4^\circ \sim 6^\circ$。同时看出，由于135月周期后，月亮平近点角有较大变化，所以 P 的改变很不稳定。有时增大得很快，有时较慢，甚至有时减小。几乎每组都出现过这种情况。还可看出，“月食之既者，至此而复既”，当望时日月在交点前（西）5°（即 P 为 175°、355°）开始，直到 P 为 185° 或 5° 左右为止，大约可以持续20个周期。20周期约当218年。在这期间，月食食分从1.0增大到1.8甚至更大，再慢慢减小到1.0，然后演变成月偏食。

月食食分是食甚时月球视直径进入本影的部分与月球视直径之比，皆以角度表示，可用下式表达：

最大食分 g＝（月角半径 H'＋地球本影角半径 S－地影中心与月球中心的距离）/月角直径 $2H'$

月亮角径、地球本影角径随日月轨道位置而有一定变化。当月球正好与本影相切时，月角半径与本影半径之和正好与地影中心与月影中心角距离相等，食分为0。望时日月如正好位于交点，则月心将通过地影中心，这时角距离为0，是食分最大的全食。如将平均参数月地平视差 π' 为 $57'$，太阳地平视差 $\pi 9''$，月角半径 $H' 16'$ 代入目前常用的计算月食地影半径公式：

$$\text{地球本影半径 } S = 1.02[0.998324 \times (\pi' + \pi) - H']$$

得出的 S 约为 $42'$。可求得最大月全食的食分为1.81。由于月亮轨道运动十分复杂，实际上，最大的月全食食分有时可达1.88。

月亮升交角距 P 是月亮与升交点的角距离。日月食计算中常要用到它。采用下列公式求得

表 5—9 135 月周期与去交度及食分的关系

(A)			(B)			(C)			(D)		
年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分
64. 7. 17	172. 14	0. 490	65. 1. 11	360. 11	1. 836	65. 7. 6	180. 66	1. 761	67. 11. 10	350. 28	0. 207
75. 6. 17	354. 21	0. 992	75. 12. 11	179. 01	1. 634	76. 6. 6	2. 90	1. 430	78. 10. 10	170. 34	0. 385
86. 5. 17	176. 40	1. 149	86. 11. 9	358. 14	1. 569	87. 5. 6	184. 73	1. 003	89. 9. 9	350. 84	0. 263
97. 4. 15	357. 21	1. 345	97. 10. 10	178. 21	1. 574	98. 4. 4	5. 47	0. 945	100. 8. 7	170. 68	0. 251
108. 3. 15	178. 55	1. 657	108. 9. 8	358. 03	1. 470	109. 3. 5	186. 88	0. 814	111. 7. 9	352. 51	0. 731
119. 2. 13	359. 49	1. 768	119. 8. 8	178. 46	1. 622	120. 2. 2	7. 39	0. 545	122. 6. 8	174. 62	0. 942
130. 1. 12	178. 71	1. 587	130. 7. 9	0. 35	1. 827	131. 1. 1	186. 18	0. 789	133. 5. 7	355. 56	1. 066
140. 12. 12	358. 06	1. 563	141. 6. 7	182. 00	1. 478	141. 12. 1	5. 90	0. 962	144. 4. 6	177. 30	1. 466
151. 11. 12	177. 88	1. 511	152. 5. 6	3. 19	1. 339	152. 10. 1	185. 68	0. 854	155. 3. 7	358. 70	1. 637
162. 10. 31	356. 96	1. 277	163. 4. 7	185. 11	1. 086	163. 9. 30	4. 45	1. 069	166. 2. 3	178. 28	1. 515
173. 9. 9	176. 87	1. 370	174. 3. 6	6. 24	0. 738	174. 8. 30	185. 17	1. 083	177. 1. 2	357. 98	1. 554

续表

(E)			(F)			(G)			(H)		
年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分
68. 5. 6	177. 23	1. 396	68. 10. 29	358. 21	1. 580	72 . 2. 22	179. 50	1. 800	72. 8. 16	359. 14	1. 670
79. 4. 5	357. 95	1. 471	79. 9. 29	178. 43	1. 614	83. 1. 22	359. 97	1. 848	83. 7. 18	179. 88	1. 850
90. 3. 5	179. 07	1. 735	90. 8. 29	358. 55	1. 563	93. 12. 21	178. 94	1. 624	94. 6. 17	2. 03	1. 565
101. 2. 2	359. 76	1. 814	101. 7. 28	179. 14	1. 730	104. 11. 20	358. 10	1. 565	105. 5. 17	183. 84	1. 158
112. 1. 2	178. 85	1. 610	112. 6. 27	1. 18	1. 698	115. 10. 21	178. 04	1. 544	116. 4. 15	4. 76	1. 068
122. 12. 1	358. 08	1. 564	123. 5. 28	182. 92	1. 317	126. 9. 19	357. 60	1. 393	127. 3. 16	186. 36	0. 892
133. 10. 31	177. 94	1. 524	134. 4. 26	4. 00	1. 200	137. 8. 19	177. 86	1. 525	138. 2. 13	7. 09	0. 595
144. 9. 30	357. 24	1. 328	145. 3. 26	185. 77	0. 984	148. 7. 19	359. 56	1. 811	149. 1. 12	186. 08	0. 812
155. 8. 30	177. 32	1. 440	156. 2. 24	6. 71	0. 659	159. 6. 18	181. 07	1. 640	159. 12. 13	5. 88	0. 965
166. 7. 30	358. 82	1. 691	167. 1. 23	185. 93	0. 844	170. 5. 18	2. 34	1. 481	170. 11. 11	185. 60	0. 863
177. 6. 29	180. 17	1. 799	177. 12. 23	5. 85	0. 969	181. 4. 17	184. 38	1. 198	181. 10. 10	4. 19	1. 165

$$P=P_0-0^\circ.4125\sin m+0^\circ.1135\sin 2m$$
$$+2^\circ.2172\sin M+0^\circ.1293\sin 2P_0$$

式中 P_0 为平升交角距，m、M 分别为月、日的平近点角，它们的值分别为：

$$P_0=11^\circ.250889+483202^\circ.025150T$$
$$m=296^\circ.1046+477198^\circ.849108T+0^\circ.009192T^2$$
$$M=358^\circ.4758+35999^\circ.049750T-0^\circ.000150T^2$$

其中 $T=(JD-2415020.0)/36525$，为自 1900.0（历书时）起算的儒略世纪数。JD 为我们所要计算日月食日期对应的儒略日。计算公元 1600 年以前的数值需进行世界时和历书时时差 ΔT 的修正。

四分历在 135 月的周期里，每隔 $5\frac{20}{23}$ 月得一月食，具体安排方法如表5—10所示。即，5 月者 1，6 月者 6，5 月者 1，6 月者 7，5 月者 1，6 月者 7，凡 135 月而复始。

表 5—10 135 月周期中 23 食的安排

间 隔	5月	6月	6月	6月	6月	6月	6月	5月
食月安排	$0\frac{0}{23}$	$5\frac{20}{23}$	$11\frac{17}{23}$	$17\frac{14}{23}$	$23\frac{11}{23}$	$29\frac{8}{23}$	$35\frac{5}{23}$	$41\frac{2}{23}$
间 隔	6月	6月	6月	6月	6月	6月	6月	5月
食月安排	$46\frac{22}{23}$	$52\frac{19}{23}$	$58\frac{16}{23}$	$64\frac{13}{23}$	$70\frac{10}{23}$	$76\frac{7}{23}$	$82\frac{4}{23}$	$88\frac{1}{23}$
间 隔	6月	6月	6月	6月	6月	6月	6月	5月
食月安排	$93\frac{21}{23}$	$99\frac{18}{23}$	$105\frac{15}{23}$	$111\frac{12}{23}$	$117\frac{9}{23}$	$123\frac{6}{23}$	$129\frac{3}{23}$	$135\frac{0}{23}$

在三统历和四分历中，月食在 135 月交食周期中的分布是完全相同的。后汉四分历术文中记载了推月食的两个历元。一为四分历的庚申上元，即孔子获麟前 276 万年；一为四分历给出的月食五星之元、公元前 9281 年。它们的近距之元分别是河平癸

巳岁(前28)和元帝初元二年甲戌岁(前47)。两元相差1章(19年)。以后文中分别称这两个月食历元为河平癸巳元和月食五星元。只要根据月食历元求出每个135月周期起始月的位置,根据上述每会(135月周期称朔望之会,简称会)中月食的安排,就可以得出每个月食所在的年月。上节介绍了四分历推月食的两种方法。这里说的可看作是步月食的第三种方法。只要借助于一本载有东汉朔闰的历表,用此法推算月食是十分方便的。表5－11中作者计算给出了由河平癸巳元、月食五星元、太初历元和三统历月食元得到的后汉近二百年间每会(135月周期)会首所在之年月。由三统历推月食法知所用的月食历元即太初历元。但这个历元对于推算月食却不理想。前面说过,135月是个较好的交食周期,但这还不够,要准确预报月食还要选好历元和适用的时段。用太初历元推算月食,在前104至前18年中无一例月食报准。其后几十年也仅能推出不足1/3。三统历月食元会首比太初历元会首迟一个月。对于太初历施行期间这是一个比较理想的历元。用它可以一个不漏地报出前104至前18年的全部本影月食。太初历是否用135月周期推步月食已不可考。《续汉志》记有,“至永平五年官历署七月十六日月食”,由此可证至少后汉前期明帝永平年间官历推算月食使用的是三统历月食元,而不是太初历元。

135月、223月、358月都是较好的交食周期,尤其223月周期最为理想。每个周期后日月与交点所处的相对位置变化不大,交食可重复发生,从而组成一个日月食系列。在一个周期系统里的日食或月食,每个食之间都相距一个周期的月数。我们仍讨论135月周期。一个135月周期系列的月食群,通常从最小食分的半影食或偏食开始。其时日月黄经相冲(相距180°),而所处位置在交点之西约16°.5(半影食)或10°.5。每过135月,日月升交角距增加约0°.5,食分逐渐加大到月全食。等望时日月穿过交点到

表 5－11　四种月食历元的各会(135 月周期)首月

太初历元			三统历月食元			月食五星元			河平癸巳元		
元封 六、十一	BC 104. 1. 8	*P* 346°. 65	元封 六、十二	BC 104. 2. 7	*P* 18°. 03	初元 二、十一	BC 47. 1. 8	*P* 8°. 59	建始 五、十一	BC 28. 1. 8	*P* 16°. 38
太始 三、十	BC 94. 12. 8		太始 三、十一	BC 93. 1. 7		建昭 二、十	BC 37. 12. 7		鸿嘉 三、十	BC 18. 12. 8	
始元 四、九	BC 83. 11. 7		始元 四、十	BC 83. 12. 6		河平 三、九	BC 26. 11. 7		绥和 二、九	BC 7. 11. 7	
本始 二、八	BC 72. 10. 7		本始 二、九	BC 72. 11. 5		永始 二、八	BC 15. 10. 6		元始 五、八	AD 5. 10. 6	
元康 五、七	BC 61. 9. 5		元康 五、八	BC 61. 10. 5		建平 三、七	BC 4. 9. 5		天凤 三、八	AD 16. 9. 5	
甘露 四、六	BC 50. 8. 5		甘露 四、七	BC 50. 9. 4		居摄 三、六	AD 8. 8. 5		建武 三、六	AD 27. 8. 6	
永元 五、五	BC 39. 7. 6		永元 五、六	BC 39. 8. 4		天凤 六、六	AD 19. 7. 5		建武 十四、五	AD 38. 7. 5	
河平 元、四	BC 28. 6. 4		河平 元、五	BC 28. 7. 4		建武 六、四	AD 30. 6. 4		建武 廿五、四	AD 49. 6. 4	
鸿嘉 四、三	BC 17. 5. 4		鸿嘉 四、四	BC 17. 6. 2		建武 十七、三	AD 41. 5. 4		永平 三、三	AD 60. 5. 4	
建平 元、二	BC 6. 4. 4		建平 元、三	BC 6. 5. 3		建武 廿八、二	AD 52. 4. 3		永平 十四、二	AD 71. 4. 2	201°. 58
居摄 元、正	AD 6. 3. 3		居摄 元、二	AD 6. 4. 2		永平 六、正	AD 63. 3. 3	15°. 05	建初 七、正	AD 82. 3. 3	22. 88

续表

太初历元			三统历月食元			月食五星元			河平癸巳元		
元封 六、十一	BC 104. 1. 8	*P* 346°. 65	元封 六、十二	BC 104. 2. 7	*P* 18°. 03	初元 二、十一	BC 47. 1. 8	*P* 8°. 59	建始 五、十一	BC 28. 1. 8	*P* 16°. 38
天凤 四、正	AD 17. 1. 30		天凤 四、二	AD 17. 3. 1		永平 十六、十二	AD 74. 1. 31	195. 8	永元 四、十二	AD 93. 1. 31	203. 6
建武 三、十一	AD 28. 1. 1		建武 三、十二	AD 28. 1. 30		建初 九、十一	AD 84. 12. 30	15. 05	永元 十五、十一	AD 103. 12. 31	22. 20
建武 十四、十	AD 38. 11. 30		建武 十四、十一	AD 38. 12. 30		永平 七、十	AD 95. 11. 30	225. 9	元初 元、十	AD 114. 11. 30	201. 9
建武 廿五、九	AD 49. 10. 29		建武 廿五、十	AD 49. 11. 28		延平 元、九	AD 106. 10. 30	13. 88	延光 四、九	AD 125. 10. 30	21. 73
永平 三、八	AD 60. 9. 28		永平 三、九	AD 60. 10. 28		元初 四、八	AD 117. 9. 28	193. 5	永和 元、八	AD 136. 9. 28	200. 6
永平 十四、七	AD 71. 8. 29	351°. 3	永元 十四、八	AD 71. 9. 28	22°. 30	永建 三、七	AD 128. 8. 28	13. 38	建和 元、七	AD 147. 8. 28	21. 26
建初 七、六	AD 82. 7. 28	171. 4	建初 七、七	AD 82. 8. 27	201. 9	永和 四、六	AD 139. 7. 29	194. 8	永寿 四、六	AD 158. 7. 29	202. 7
永元 五、五	AD 93. 6. 27	353. 4	永元 五、六	AD 93. 7. 26	23. 12	和平 元、五	AD 150. 6. 27	16. 53	建宁 二、五	AD 169. 6. 27	23. 61
永元 十六、四	AD 104. 5. 27	175. 5	永元 十六、五	AD 104. 6. 26	205. 1	延熹 四、四	AD 161. 5. 26	197. 5	光和 三、四	AD 180. 5. 26	205. 4
元初 二、三	AD 115. 4. 26	356. 4	元初 二、四	AD 115. 5. 26	26. 34	建宁 五、三	AD 172. 4. 26	19. 69	初平 二、三	AD 191. 4. 27	

续表

太初历元			三统历月食元			月食五星元			河平癸巳元		
元封 六、十一	BC 104. 1. 8	*P* 346°. 65	元封 六、十二	BC 104. 2. 7	*P* 18°. 03	初元 二、十一	BC 47. 1. 8	*P* 8°. 59	建始 五、十一	BC 28. 1. 8	*P* 16°. 38
永建 元、二	AD 126. 3. 26	178. 0	永建 元、三	AD 126. 4. 24	207. 9	光和 六、二	AD 183. 3. 27		建安 七、二	AD 202. 3. 26	
永和 二、正	AD 137. 2. 23	359. 1	永和 元、二	AD 137. 3. 25	29. 64	兴平 元、正	AD 194. 2. 23		建安 十八、正	AD 213. 2. 22	
建和 元、十二	AD 148. 1. 23	178. 5	建和 二、正	AD 148. 2. 22	210. 1	建安 九、十二	AD 205. 1. 22				
永寿 四、十一	AD 158. 12. 23	358. 0	永寿 四、十二	AD 159. 1. 21	29. 69	建安 二十、十一	AD 215. 12. 23				
建宁 二、十	AD 169. 11. 22	177. 9	建宁 二、十一	AD 169. 12. 21	209. 7						
光和 三、九	AD 180. 10. 21	356. 8	光和 三、十	AD 180. 11. 20	28. 90						
初平 二、八	AD 191. 9. 20		初平 二、九	AD 190. 10. 20							
建安 七、七	AD 202. 8. 21		建安 七、八	AD 202. 9. 19							
建安 十八、六	AD 213. 7. 20		建安 十八、七	AD 213. 8. 19							
黄初 五、五	AD 224. 6. 18										

达东侧以后，食分逐渐减小直至为0，结束这个系统的月食群。对于以半影食开始、结束的135月周期系统，大约需历时66个周期、近720年；以月偏食开始并结束的系统，约历时42个周期、458年左右。用上述135月周期方法预报系统内的某个月食是很容易的。

汉代推月食术是根据135月周期及每周期有23食，预测在某个时期内的全部月全食和月偏食。这就不仅涉及周期精确度，还与月食出现的间隔时间、对于需要预报月食的时段应选用什么历元都有关系。前面说过，用太初历元预测前104到前18年月食无一报准，而用仅比它迟一个月的三统历月食元却无一漏失。由表5—11看出，太初历元望月时月的升交距角 P 为346°.65，月在交点之西，预报近期月食无一成功；而三统历月食元，望时月亮的升交距角 P 为18°.03，早已出食限，且月在交点之东，预报其时84年的本影月食却全可报出。

由表5—11可知，河平癸巳元望月升交距角 P 与三统历月食元相近。经作者考查，它可完全报出前28年至公元49年整个一蔀的全部本影食。月食五星元望月升交距角 P 为8°.59，对前48年至前1年的月食，会发生少量漏报，但可全部报出公元1年6月24日（食分0.068）至171年的所有本影月食。

自东汉四分历颁行的元和二年岁前天正望（公元84年12月30日）至光和五年终（182）98年中，共发生240个月食，内半影食88，全食65，偏食87。而按135月23食计，应有月食207起。我们只讨论本影食，自元和二年天正月（84年12月）至质帝本初元年（146）终，共发生本影食96次，用河平癸巳元、月食五星元计算，结果为

河平癸巳元	报出78（81%）	漏报18（19%）
月食五星元	报出96（100%）	漏报0（0%）

用月食五星元计算桓帝建和元年(147)至灵帝熹平四年(175)底29年的月食,在总共发生的45次本影食中,仅漏报172年3月28日(熹平元年二月)1次。用河平癸巳元推算同一时期,29年中共失报13次(29%)。自建和元年(147)至光和三年(180)的34年内共漏16次,占全部本影食54次的30%。用太初历元推算公元147年至公元175年共29年的45次本影月食,报出20(44%),漏失25(56%)。由三统历月食元推算,则报对25个(56%),失报20个(44%)。

用135月23食推步月食,历元和时段的配合很重要。在整个后汉施行四分历期间(公元85年至公元220年),我们可以找出这样一个历元,它能一个不漏地将本影月食准确报出。这个历元就是公元前1008年前天正冬至月(公元前1009年12月28日),近距之元为天凤六年正月(公元18年12月26日)。可以建初九年五月(公元84年6月22日)为会首(135月周期的首月)入算。建初九年五月朔时,日月的升交距角 P 为353°.9,有日环食;望时月亮的升交距角 P 为188°.54,有月偏食(食分0.559)。这个历元与月食五星元极为相似。后者,合朔时(公元前48年12月25日)日月升交距角为173°.5,有日环食发生;望时(公元前47年1月8日)月升交距角 P 为8°.59,有食分为0.370的月偏食。只不过月食五星元朔日食发生在降交点,望时月在升交点月食,与建初九年五月历元正好相反而已。而日月与交点的相对位置也很相仿。月食五星元适用的时段为历元后的48年至220年。建初九年历元适用于紧接历元的一百三十四十年。这个差别主要是因为月亮食时的平近点角不同,影响到交食出现的间隔时间所致。

第五节　月食出现的间隔时间与步术

一、月食出现的间隔时间

月食要经过多少个朔望月才会再次出现，因为月亮运动极为复杂，由太阳、行星摄动引起的差数逾千项，月食连续发生的间隔时有变化。要严格讨论这个问题是很麻烦的。我们还是根据日月的平运动规律对它进行类似半定量性质的考查。并且讨论的范围仅限于本影月食。当然这个方法对讨论半影月食同样适用。

设以 S 表示望时（日月黄经相差 180°）太阳的黄经，Ω 表示升或降交点的黄经。$S-\Omega$ 实际上就是月食时日月的去交度，即日月与相近交点的角距。发生本影食的黄经食限平均为 10°.5，即

$$|S-\Omega|<10^\circ.5$$

或

$$-10^\circ.5<S-\Omega<10^\circ.5$$

时发生本影食。此为出现本影食的基本条件。

因交点每日以 190″.77 速度向西逆行，太阳以每日 3548″.1928 速度向东运动。所以一个朔望月的时间里，太阳相对于交点向东移动了 30°.6705。因

$$29.530588\times(3548''.1928+190''.77)/3600=30^\circ.670492$$

一个朔望月后，太阳距交点的黄经差增加 30°.6705，p 个朔望月后，太阳距交点黄经差增加 30°.6705×p。我们把它写成下列小于±90°的形式

$$30^\circ.6705p=180^\circ\times k+E_p$$

其中 k 为整数，选取的方法总使 E_p 的绝对值尽量的小，本影食由食限分析可知虽有时一年内可能一次也不出现，但从不会超过两年。因此，实际上只要列出 24 个月的 E_p 值对间距的讨论就足够

了。表5—12列出各月太阳距交黄经差 E_p 值。

表5—12　各月太阳距交黄经差 E_p 值

p	$E_p(°)$	p	$E_p(°)$	p	$E_p(°)$	p	$E_p(°)$	p	$E_p(°)$
1	+30.7	7	34.7	13	38.7	19	42.7	25	46.8
2	+61.3	8	65.4	14	69.4	20	73.4	26	77.4
3	−88.0	9	−84.0	15	−80.0	21	−75.9	27	−71.9
4	−57.3	10	−53.3	16	−49.3	22	−45.2	28	−41.2
5	−26.7	11	−22.6	17	−18.6	23	−14.6	29	−10.6
6	4.0	12	8.0	18	12.1	24	16.1	30	20.1

如果望时，去交度满足

$$-10°.5<S-\Omega<+10°.5$$

便会发生本影食。p 个朔望月后会不会再出现本影食，就要看下列关系

$$-10°.5-E_p<S-\Omega<+10°.5-E_p$$

是否满足前述的出现本影食的基本条件。可以看出，如 $|E_p|>2\times10°.5$ 时即无法满足。上列各月 E_p 值中，只有 p 为6，12，17，18，23，24，29，30几种，需要考查。其中 p 大于24者，由食限和食典看出，本影食不会有这样长的间距，可略。对应于所取的 p 值，有下列双不等式

$$p=6 \qquad -10°.5<S-\Omega<+6°.5$$

$$p=12 \qquad -10°.5<S-\Omega<+2°.5$$

$$p=17 \qquad +8°.1<S-\Omega<+10°.5$$

$$p=18 \qquad -10°.5<S-\Omega<-1°.6$$

$$p=23 \qquad +4°.1<S-\Omega<+10°.5$$

从平运动来说，$p=12$ 或18的条件都已为 $p=6$ 所容纳。$p=6$ 的条件适用范围很大。已将12、18月都包进去了。如果6个月后这样条件下不见本影食，那么12、18月后更不会发生了。但 p 为6没有包容 $p=17$、23的情况。17月后或23月后却会发生。换

句话说，简化为仅考虑平运动，本影食发生的时间间隔为 6、17 和 23 个朔望月。

由上列不等式关系可以看出，连续出现本影食的时间间隔以 6 个月的机会最多。去交度在（$-10°.5$，$+6°.5$）之间的月食，间隔时间基本上全为 6 个月。这占去了本影食的 80.95%。去交度为 8°.1～10°.5 的月食，大致间隔时间为 17 个月，约占本影食的 11.43%。去交度在 6°.5～8°.1 间的月食，它的间隔时间约为 23 个月，占全部本影食的 7.62%。

本影食平均每年发生 1.5418 次。每会 135 月平均有本影食 16.8285 次。通常，每会 135 月发生本影食 15～18 次，平均 17 次。在这 17 次中，间隔为 6 个月的约 14，17 月的约 2，23 月者约 1 次。

以上讨论基于平均运动和平食限而言的。事实上日月运动，尤其月亮运动极为复杂，月亮实际位置经常偏离平位置数度，最多可达 7°。本影食限也在 9°.65 和 11°.5 之间变化。因此前面给出的各 E_p 值及间隔 p 为 6、11、12、17、23 等朔望月发生本影食的条件（或上列不等式）会有很大的出入。上列 p 为 11 的 E_p 值是 $-22°.6$，在本影月偏食上限之内，应属考查范围。实际上，间隔为 11 个月的本影食时有发生。12 月的情况虽不多见，但也有可能。由于 11、12 个朔望月本影食的出现，再加上间隔为 17 个月的本影食更为常见。所以相距 23 个月出现本影食的机会大大减少了。往往多年中都难得一见。表 5－13 列出东汉时期几会中本影食的实际分布。由此可看出本影食出现的相距月数的现实情况、各类概率以及与月亮升交距角 P 之间的关系。在公元 62 年至 141 年的 80 年中，基本上每会（135 月）内有本影食 17 次，内 14 次间距为 6 个月，另 3 次间隔为 17 个月。在公元 2 世纪 40 年代（公元 139 年 12 月 9 日至公元 150 年 11 月 6 日）的 135 月周期

中，有本影食 18 次，其中间距为 17 月者 2，间隔为 11 月者 1，另 15 食间距为 6 个月。在 150 年 11 月 7 日至 161 年 12 月 5 日的 135 个月中，有食 17 次，间隔 6 月者 13，17 月者 2，12 月者 1，11 月者 1。自 169 年 11 月 6 日起的 5 会（5 个 135 月周期）中的本影食全列在表 5—13 中，第一、二会中有食 17，内间距 6 月者 13，17 月者 2，11 月者 1，12 月者 1；第三会中有食 16，其中间隔为 6 月者 13，17 月者 2，23 月者 1；第四会有食 17，间隔同第一、二会；第五会有食 15，间隔 6 月者 12，23 月者 2，17 月者 1。

二、四分历应用周期推算月食的方法

四分历于东汉元和二年（85）颁行，东汉亡后，魏、蜀汉分别行用到公元 236、263 年，共施行 179 年。所当庚辰天纪蔀名为：

公元前 161 至前 86 年甲子蔀，公元前 85 至前 10 年癸卯蔀，公元前 9 至公元 67 年壬午蔀，公元 68 至 143 年辛酉蔀，公元 144 至 219 年庚子蔀，公元 220 至 295 年己卯蔀。

癸卯蔀四章章首年份、日名分别为：公元前 85 年（昭帝始元二年丙申）岁前天正冬至癸卯日；公元前 66 年（宣帝地节四年乙卯）岁前冬至癸未日；公元前 47 年（元帝初元二年甲戌岁）岁前冬至癸亥日；公元前 28 年（成帝河平元年癸巳岁）岁前冬至癸卯日。第三、四两章章首为东汉四分历推月食法的两个近距历元：月食五星元和河平癸巳元。

东汉时期，月食推步所用历元历术，《续汉志》论月食有详细记述。据此可知，东汉推月食所用方法大致分以下几个阶段：

①元和二年（85）至永元元年（89），四分因太初法，以河平癸巳为元，施行 5 年。永元元年，天以七月后闰食，术以八月，出现失误。

②永元二年（90）正月十二日，蒙公乘宗绀上书言，今月十六

表 5—13　每会(135 月)内本影月食的分布

年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)
75.6.17	6	0.992	354.21	86.11.9	6	1.569	358.14	97.4.15	6	1.345	357.21	169.5.28	6	0.768	353.79
75.12.11	6	0.634	179.01	87.5.6	6	1.003	184.73	97.10.10	6	1.574	178.21	169.11.22	6	1.504	177.85
76.6.6	6	1.430	2.90	87.10.30	6	0.942	6.05	98.4.4	6	0.945	5.47	170.5.18	6	1.481	2.34
76.11.29	6	0.757	186.30	89.3.15	17	0.329	170.66	98.9.29	6	0.777	186.23	170.11.11	6	0.863	185.60
78.4.16	17	0.095	350.12	89.9.9	6	0.263	350.84	100.2.13	17	0.564	351.60	171.5.7	11	0.159	11.07
78.10.10	6	0.385	170.34	90.3.5	6	1.735	179.07	100.8.7	6	0.251	170.68	172.3.28	12	0.259	349.72
79.4.5	6	1.471	357.95	90.8.29	6	1.563	−1.45	101.2.2	6	1.814	359.76	173.3.17	6	1.550	358.19
79.9.29	6	1.614	178.43	91.2.22	6	0.747	187.31	101.7.28	6	1.730	179.14	173.9.9	6	1.370	176.87
80.3.24	6	0.831	6.12	91.8.18	6	0.749	6.26	102.1.22	6	0.507	7.62	174.3.6	6	0.738	6.24
80.9.18	6	0.730	186.55	93.1.1	17	0.391	171.80	102.7.18	6	0.683	187.75	174.8.30	17	1.083	185.87
82.2.2	17	0.009	351.88	93.6.27	6	0.859	353.35	103.12.1	17	0.206	350.21	176.1.14	6	0.200	350.00
82.7.28	6	0.364	171.38	93.12.21	6	1.624	178.94	104.5.27	6	1.096	175.51	176.7.10	6	0.486	172.03
83.1.22	6	1.848	359.97	94.6.17	6	1.565	2.03	104.11.20	6	1.565	358.10	177.1.2	6	1.554	357.98
83.7.18	6	1.850	179.88	94.12.11	6	0.764	186.28	105.5.17	6	1.158	183.84	177.6.29	6	1.799	180.17
84.1.12	6	0.482	7.79	95.6.6	6	0.079	10.79	105.11.9	6	0.954	5.97	177.12.23	6	0.969	5.85
84.7.6	6	0.559	188.54	96.10.20	17	0.358	170.18	107.3.26	17	0.243	170.07	178.6.18	17	0.414	188.18
85.11.20	17	0.206	350.24					107.9.20	6	0.189	350.44	179.11.2	6	0.006	349.51
86.5.17	6	1.249	176.40									180.4.27	6	1.235	175.79

续表

年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)
180.10.21	6	1.239	356.75	191.9.21	6	3.310	176.5	203.2.14	6	0.941	185.42	213.1.24	6	1.521	357.74
181.4.17	6	1.198	184.38	192.3.17	6	1.832	5.69	203.8.10	17	0.833	0.59	213.7.20	6	1.554	178.46
181.10.10	17	1.115	4.19	192.9.9	17	1.153	184.71	204.12.24	6	0.303	169.92	214.1.14	6	0.993	5.69
183.2.25	6	0.157	170.49	194.1.24	6	0.184	349.85	205.6.19	6	0.470	352	214.7.9	23	0.723	186.42
183.8.21	6	0.293	349.69	194.7.21	6	0.343	171.23	205.12.14	6	1.495	177.83	216.5.19	6	0.976	174.1
184.2.14	6	1.463	177.95	195.1.14	6	1.542	357.89	206.6.8	6	1.772	0.61	216.11.12	6	1.191	356.48
184.8.9	6	1.579	1.85	195.7.10	6	1.703	179.3	206.12.3	6	0.870	185.52	217.5.9	6	1.449	182.78
185.2.2	6	0.886	185.71	196.1.3	6	0.977	5.8	207.5.29	11	0.431	9.36	217.11.1	23	1.174	3.87
185.7.30	17	0.722	6.67	196.6.28	23	0.572	187.28	208.4.18	12	0.035	348.34	219.9.11	6	0.136	348.69
186.12.14	6	0.311	169.94	198.5.8	6	1.108	174.96	209.4.8	6	1.337	356.93	220.3.7	6	1.314	177.07
187.6.9	6	0.618	352.9	198.11.1	6	1.211	356.59	209.10.1	6	1.265	176.21	220.8.31	6	1.389	357.01
187.12.3	6	1.499	177.84	199.4.28	6	1.320	183.6	210.3.28	6	0.939	5.08	221.2.24	6	1.008	185.05
188.5.28	6	1.626	1.48	199.10.22	17	1.149	4	210.9.21	17	1.211	184.34	221.8.21	17	0.932	5.36
188.11.22	6	0.868	185.55	201.3.7	6	0.070	170	212.2.4	6	0.155	349.64	223.1.5	6	0.292	169.85
189.5.17	11	0.293	10.23	201.8.30	6	0.209	349.15	212.7.31	6	0.210	170.48	223.6.30	6	0.327	
190.4.8	12	0.152	349.06	202.2.24	6	1.395	177.55					223.12.25	6	1.488	
191.3.28	6	1.450	357.59	202.8.21	6	1.478	357.55								

日月当食，而历以二月。至期如绀言。诏书以绀法署。施行56年。至本初元年(146)，天以十二月食，历以后年正月，于是始差。

③本初元年(146)至熹平三年(174)29年之中，先历食者16事。续汉志未记载这时期行何法术。

④熹平四年(175)，绀孙诚上书言，受绀法术当复改。今年十二月当食，而官历以后年正月。到期如言。诏书听行诚法。直至光和二年五月。

⑤光和二年(179)五月后，奏废诚术施行恂术。

⑥光和三年(180)以后，施行诚术。

冯恂术以5640月有961食为法。5640月正好为6蔀456年，比135月周期的岁数513(6345月)少705月。

5640个朔望月＝166552.5163日

6120.5交点月＝166552.3925日

6044.5近点月＝166553.4775日

480.5交食年＝166550.9244日

恂术合每交5.868886575($5\frac{835}{961}$或$5\frac{19.9844}{23}$)月，由前面的周期讨论，上列数值显示冯恂的交食之法是个相当不错的周期。它与135月周期微有不同，而稍为密近。交食周期均可表示为

$$\frac{m}{\frac{n}{2}}=\frac{47x+41y}{4x+\frac{7}{2}y}$$

其中m为朔望月数，$\frac{n}{2}$为交食年数，称作交率；$m+\frac{n}{2}$为交数，即交点月数。冯恂交食周期即为此表达式中$x=79$，$y=47$的情况。因恂术施行的时间较短，且续志未记载它的历元，无法对其预报做更深入的分析。

宗诚以135月23食为法。诚为绀孙，受绀法术。东汉除光和二年五月后施行恂术，光和三年(180)后又行诚法。可知除光

和二至三年一段外，东汉时期皆行 135 月 23 食步法。下面依续汉志月食纪事来考查东汉各段时期推月食所用的历元。

东汉时期有如下 8 条月食记载，其中多为验证历法记录的预报数值。

①永平五年(62)，官历署七月十六日月食。

②永元元年(89)天以七月后闰食，术以八月。

③永元二年(90)正月十二日宗绀上书言，“今月十六日月当食，而历以二月。”至期如绀言。

④本初元年(146)天以十二月食，历以后年正月。

⑤光和二年己未(179)月食，官历以五月。

⑥熹平四年(175)，宗诚上书称，“今年十二月当食，而官历以后年正月。”到期如言。

⑦桓帝永寿三年(157)十二月壬戌月食非其月。

⑧延熹八年(165)正月辛巳，月食非其月。

⑦、⑧载《续汉书·五行志》，前 6 条皆著录于《续汉书·律历志》中。

8 次月食中，两次记载“月食非其月”。应理解作发生月食的月份与预报的不符。其余 6 次皆注明历作某月或历以某月。前已指出，续汉志记载，除光和二至三年一段采用冯恂术外；整个东汉时期皆以 135 月 23 食法推步。在表 5－14、表 5－15 中，我们分别以河平癸巳元和月食五星元用四分历推月食术计算这 8 次月食，以考查其时推步所用的历元、方法。计算结果显示：

①永平五年七月月食为偏食，发生于公元 62 年 9 月 7 日丙午晚，食分 0.669，全食过程 176 分钟，初亏 19:40，食甚 21:07，复圆 22:35。此食用河平癸巳元、月食五星元和三统历月食元皆可报出。

②永元元年闰七月月偏食发生于公元 89 年 9 月 9 日庚午日凌晨，食分 0.263，是食河平癸巳元、月食五星元、太初历元均可报准。

《续汉志》说，"天以七月后闰食，术以八月"，谓"四分因太初法以河平癸巳为元，施行五年"。只有三统历月食元会将此食报为八月。称元和二年(85)至永元元年(89)5年用河平癸巳元，值得商榷。有可能颁行四分历的头5年仍因太初法，用三统历月食元。

③永元二年正月月全食，发生于公元90年3月5日丁卯子夜前后，食分1.735。宗绀上书言："今月十六日月当食，而历以二月。"此食河平癸巳、月食五星和三统历月食元皆可推出，太初历元报为前一月(永元元年十二月)。"历以二月"，此历系何术不得而知。《续汉志》原文作"十二年"(100)，因后文有"施行五十六岁至本初元年(146)"句，故校改为永元二年(90)。校改后调整了年数上的矛盾，却出现了四分历行用初期究竟用什么历元推算月食的问题。永元十二年正月望发生了一次月带食而出的现象。这次月偏食出现在公元100年2月13日己亥申酉时之间，食分0.564，全食历时152^{m}。日没月出时(约$17^{h}40^{m}$)，已过食甚，月带食出，约过40^{m}复圆。是食，月食五星元和太初历元报为永元十二年正月；河平癸巳和三统历月食元报为二月。由永元元年闰七月食和永元十二年正月食来考查，只有用三统历月食元会将此二食报为八月和二月；月食五星元全可报准；河平癸巳元报为元年闰七月食，十二年二月食；太初历元均可报出。由此可得出，四分历颁行初期，元和、章和、永元十二年前四分历步月食，因太初法，用三统历月食元。这样分析，下文的至本初元年(146)56岁不好解释。按56岁的说法，则永元元年八月、二年二月月食系何术推得，不易解决。看来，《续汉志》这段记载文字有错讹。并且还可看出，"以河平癸巳为元"这句话，可能也不准确。甲辰(永元十二年元月二十一日，而永元二年元月无甲辰)，诏书以绀法署，施行56岁，至本初元年(146)，天以十二月食，历以后年正月，于是始差。由《续汉志》的这个记载及宗绀报准永元十二年正月(包括永

元二年正月)月食,可证宗绀术是以月食五星元为法的。因前已述,以月食五星元可报出自公元元年 6 月 24 日至 172 年 3 月 27 日间的全部月食。而河平癸巳元自永元至本初年间至少本影食报错 18 起,皆为先历而食。其中七八次食时月亮在地平以下(白昼),中国原本不可见。

④本初元年十二月望,147 年 2 月 3 日丙申,22^h～24^h 许发生一次食分为 0.286 的月偏食,《续汉志》说,天以十二月食,历以后年正月,于是始差。计算看出,月食五星元此食可准确报出(表 5—15),河平癸巳元后天 1 月(表 5—14)。可见其时所行已非月食五星元法。《续汉志·论月食》称,“到熹平三年(174),二十九年之中,先历食者十六事。”月食五星元在这期间本影食仅误失 1 次(172.3.28 月偏食);而河平癸巳元在建和元年(147)至熹平四年(175)的 29 年中,确先历食者 16 事。可以认为这 29 年施行河平癸巳元步月食法。但要指出,这 16 次可能为分析得出的结果,而并非观测实记。因 16 次报迟 1 月的食中,有 2 次为半影食。这两次半影食食分很大(154.9.9,半影食分 1.058,172.9.20,半影食分 0.999),精细的观测者是可以发现的。但有几次本影食,月食全程发生于白昼。如 147 年 7 月 30 日月偏食,食分 0.494;150 年 11 月 22 日偏食,食分 0.320;161 年 10 月 22 日偏食,食分 0.036,等等,这些月食在中国都是不易看到的。

⑤熹平四年(175)绀孙诚上书言,今年十二月当食,而官历以后年正月。到期如言。丙申(十二月三日,疑为丙辰二十三日之误)诏书听行诚法。此食发生在 176 年 1 月 14 日戊申日日出前,食分 0.200,月食全程 1^h40^m。宗诚以月食五星元推算,得十二月食,合天。而其时所行推月食法为河平癸巳元,此食报迟一个月,报为熹平五年正月。由此也可证,其前的 29 年,行用河平癸巳元推月食法。丙申后,改行诚法。

⑥光和二年己未岁，是年三、四月望皆有半影食。三月食分较大(179.5.9，半影食分0.800)，精细观测或可发现；四月食分甚小(179.6.7，半影食分0.155)，看不到。冯恂以5640月961食法推食在三月，由表5—14、表5—15知，河平癸巳、月食五星元推食在四月，官历以五月。官历为何术，不得而知。

⑦《续汉书·五行志》载，桓帝永寿三年十二月壬戌月食非其月。是食发生于158年1月2日壬戌晚间，为食分0.208的偏食。时当四分历永寿三年十一月望，不是十二月。"十二"系"十一"之误。根据前面讨论可知，是时月食推步用河平癸巳元。由表5—14看出，河平癸巳元推得月食在十二月，食先历一月，故云"月食非其月"。

⑧延熹八年正月辛巳月偏食出现于165年2月14日壬午的日出之前，食分0.227。为四分历延熹八年正月望日。古代天象纪日以清晨黎明为日的分界，故此月食仍称辛巳食。是时月食推步用河平癸巳为法。此法推得延熹八年二月当食，见表5—14。食先历一月发生，故称"非其月"。

由以上考查可以看出，《续汉志·论月食》中有些文字可能有错讹。可比较明确地知道下列几点：

①永元二年(90)或十二年(100)至本初元年(146)，月食推步用月食五星元。

②建初元年(147)至熹平四年(175)，用河平癸巳元。

③据《续汉志》，熹平五年(176)至光和二年(己未，179)，用月食五星元法。但光和二年官历推"五月食"，其术不明。

④光和三年据《续汉志》，施用冯恂步月食术。

⑤光和四年(181)后，施行诚术(月食五星元法)。

熹平五年(176)以后月食法是根据《续汉书·律历志》记载得出的。因缺乏月食记录无法做进一步的考查。

表 5—14　月食记载

所求年	入蔀会年	积食 入蔀会年 −1× 1081/513	积月 $\frac{135\times 积食}{23}$	入章月 $\left[\frac{积月}{235}\right]_R$	入章闰 $\frac{7\times 入章月}{235}$	天正前食月	食月 积月×朔策
85	625	1314	$7712\frac{14}{23}$	192	5	$7\frac{14}{23}$	227741
86	626	1317	$7730\frac{5}{23}$	210	6	$0\frac{5}{23}$	228273
87	627	1319	$7741\frac{22}{23}$	221	6	$11\frac{22}{23}$	228598
88	628	1321	$7753\frac{16}{23}$	233	6	$11\frac{16}{23}$	228952
89	629	1323	$7765\frac{10}{23}$	10	0	$10\frac{10}{23}$	229307
90	630	1325	$7777\frac{4}{23}$	22	0	$10\frac{4}{23}$	229661
147	687	1445	$8481\frac{12}{23}$	21	0	$9\frac{12}{23}$	250451
158	698	1468	$8616\frac{12}{23}$	156	4	$8\frac{12}{23}$	254437
165	705	1483	$8704\frac{12}{23}$	9	0	$9\frac{13}{23}$	257036
176	716	1506	$8839\frac{13}{23}$	144	4	$8\frac{13}{23}$	261023
179	719	1515	$8892\frac{9}{23}$	197	5	$0\frac{9}{23}$	262588
63	603	1268	$7442\frac{14}{23}$	157	4	$9\frac{14}{23}$	219768

与河平癸巳元

朔日			余年	积月闰余 余年× 235/19	积月×112 135	天正	后食	次食
41 庚寅	建和 八、六	83.7.3	112	$1385\frac{5}{19}$	$1149\frac{5}{135}$	$0\frac{5}{23}$	元和 元、十一	元和 二、五
33 壬午	元和 元、十一	84.12.16	113	$1397\frac{12}{19}$	$1158\frac{134}{135}$	$5\frac{19}{23}$	元和 三、四	元和 三、十
58 丁未	元和 二、十	85.11.6	114	$1410\frac{0}{19}$	$1169\frac{105}{135}$	$4\frac{13}{23}$	元和 四、三	元和 四、九
52 辛丑	元和 三、十	86.10.26	115	$1422\frac{7}{19}$	$1179\frac{99}{135}$	$4\frac{7}{23}$	章和 二、三	章和 二、九
47 丙申	元和 四、九	87.10.16	116	$1434\frac{14}{19}$	$1189\frac{93}{135}$	$4\frac{1}{23}$	永元 元、三	永元 元、闰七
41 庚寅	章和 二、九	88.10.4	117	$1447\frac{2}{19}$	$1200\frac{64}{135}$	$2\frac{18}{23}$	永元 二、正	永元 二、七
11 庚申	永嘉 元、八	145.9.5	174	$2152\frac{2}{19}$	$1785\frac{49}{135}$	$2\frac{3}{23}$	建和 元、正	建和 元、七
37 丙戌	永寿 二、七	156.8.4	185	$2288\frac{3}{19}$	$1898\frac{26}{135}$	$1\frac{3}{23}$	永寿 三、十二	永寿 四、六
56 乙巳	延熹 六、八	163.9.16	192	$2374\frac{14}{19}$	$1969\frac{73}{135}$	$3\frac{4}{23}$	延熹 八、二	延熹 八、闰七
23 壬申	熹平 三、七	174.8.16	203	$2510\frac{15}{19}$	$2082\frac{50}{135}$	$2\frac{4}{23}$	熹平 五、正	熹平 五、六
28 丁丑	熹平 七、十一	178.11.28	206	$2547\frac{17}{19}$	$2113\frac{9}{135}$	$0\frac{9}{23}$	熹平 七、十一	光和 二、四
48 丁酉	永平 四、八	61.9.3	89	$1100\frac{15}{19}$	$912\frac{80}{135}$	$3\frac{11}{23}$	永平 五、二	永平 五、七

表 5—15　月食记录与月食五星元

所求年	距元	余年	积月闰余	积月 $\times \frac{112}{135}$	天正后食		次食		又次食	
85	9365	131	$1620\frac{5}{19}$	$1344\frac{0}{135}$	0	元和元、十一	$5\frac{20}{23}$	元和二、四	$11\frac{17}{23}$	元和二、十
86	9366	132	$1632\frac{12}{19}$	$1353\frac{129}{135}$	$5\frac{14}{23}$	元和三、四	$11\frac{11}{23}$	元和三、十		
87	9367	133	$1645\frac{0}{19}$	$1364\frac{100}{135}$	$4\frac{8}{23}$	元和四、三	$10\frac{5}{23}$	元和四、九		
88	9368	134	$1657\frac{7}{19}$	$1374\frac{94}{135}$	$4\frac{2}{23}$	章和二、三	$9\frac{22}{23}$	章和二、八	$15\frac{19}{23}$	章和二、八
89	9369	135	$1669\frac{14}{19}$	$1384\frac{88}{135}$	$3\frac{19}{23}$	永元元、二	$9\frac{16}{23}$	永元元、闰七		
90	9370	136	$1682\frac{2}{19}$	$1395\frac{59}{135}$	$2\frac{13}{23}$	永元二、正	$8\frac{10}{23}$	永元二、七		
147	9427	193	$2387\frac{2}{19}$	$1980\frac{44}{135}$	$1\frac{21}{23}$	本初元、十二	$7\frac{18}{23}$	本初二、六	$13\frac{15}{23}$	建和元、十二
158	9438	204	$2523\frac{3}{19}$	$2093\frac{21}{135}$	$0\frac{21}{23}$	永寿三、十一	$6\frac{18}{23}$	永寿四、五	$12\frac{15}{23}$	永寿四、十一
165	9445	211	$2609\frac{14}{19}$	$2164\frac{68}{135}$	$2\frac{22}{23}$	延熹八、正	$8\frac{19}{23}$	延熹八、七	$14\frac{16}{23}$	延熹八、十二
175	9455	221	$2733\frac{8}{19}$	$2267\frac{51}{135}$	$2\frac{5}{23}$	熹平四、正	$8\frac{2}{23}$	熹平四、七	$13\frac{22}{23}$	熹平四、十二
179	9459	225	$2782\frac{17}{19}$	$2308\frac{4}{135}$	$0\frac{4}{23}$	光和元、十一	$6\frac{1}{23}$	光和二、四	$11\frac{21}{23}$	光和四、九
62	9342	108	$1335\frac{15}{19}$	$1107\frac{75}{135}$	$3\frac{6}{23}$	永平五、二	$9\frac{3}{23}$	永平五、七	$15\frac{0}{23}$	永平六、正（会首）

第六节 行星运动和开普勒定律

一、行星的视运动

在古代,缺乏人工照明。夜晚地面黢黑一片。皎洁的明月或无月的晴夜,满天的星斗可能是最吸引人们视线的地方。古代的游牧人很早就发现有五颗亮星在众星中移动。这就是后人称之为水星(辰星)、金星(太白)、火星(荧惑)、木星(岁星)、土星(填星)的五大行星。在中国,经孔子删定的《诗经》中就有关于行星的描述。五星的完整名称至迟战国时期已经出现。在西亚地区,四千年以前就以它们运行的快慢视作距离远近而分类。水、金移动较快,距离最近,火星次之,木星再次,土星运动最慢因而距离最远。

长期观测会发现,行星在恒星中的运动有一定的规律和特点。

(一)行星都在黄道附近星空运动

五大行星在星空中运动的路线非常接近,只有水星稍微有些差别,但水星不易看到。五星在恒星间运行的平均路径就是黄道,中国古代就以黄道、赤道附近天域的亮星,分作十二次、二十八宿,用来描述它们的运动。这些取作标志的亮星,古代曾有不同的选择。大概到西汉,才逐渐固定下来。在西亚,巴比伦人很早就把黄道两旁各宽 $8^\circ.5$ 的地方,画出一条宽 17° 的黄道带。日月五星都在这条带内运行。1781 年 F. W. 赫歇耳(Frederick William Herschel)发现的天王星,它的轨道面与黄道交角不足 1°。1846 年 U. J. J. 勒威耶(Urbain Jean Joseph Le Verrier)观测找到的海王星,轨道倾角不到 2°。天王星、海王星的运行也在黄道带内。只有 1930 年在海王星之外发现的冥王星,它的偏心率 e

和轨道交角 i 都很大($e=0.246, i=17°7'$),公转周期约为 250 年。九大行星中,仅冥王星,另外,在火星、木星之间运行的某些小行星,因轨道倾斜度大会走出黄道带去。巴比伦人并将黄道带沿周天分为 12 等份,称作黄道十二宫。用它描述日、月和五大行星的运行和位置。

(二)行星视运动有顺逆、疾徐和停留

追随某一行星一段时间,便会发现行星运动非常复杂。行星主要做自西向东运动,但速度有疾有徐。当慢到一定时候,会在星空中做短暂的停留。然后向相反方向(向西)移动,由快而慢。几个星期或几个月以后,再做短暂停留,又复向东运行。这种顺逆、疾徐、停留有一定规律和周期。往复一次的时间,天文上称作会合周期,其值由百余天到近八百天,五星各不相同。若将行星在星空的路径画在星图上,呈现为带有环圈(如金、水、火星)的蜿蜒形蛇行轨道。

(三)行星有不同的公转周期或恒星周期

行星在恒星间的主要运动方向是自西向东,称作顺行。各行星沿着恒星星空视运行一周的时间各不相同。水星、金星约为 1 年,火星不到 2 年,木星约 12 年,土星约 29.5 年。

有些天文、历法史论著中,把古书上记载的水星、金星(地内行星)行天一周的时间与现代天文学上说的恒星周期等同起来并进行比较。实际上这还是有些不同的。水金火木土五星、天王星、海王星、冥王星以及地球都围绕太阳公转,是太阳系的九大行星。它们公转一周的时间称作公转周期。从太阳上看,这个时间就是行星在恒星间行天一周所用的时间。故也把公转周期叫作恒星周期。行星绕日运动,只有顺行,没有逆行和停留现象。之

所以行星视运动会出现逆、留，是因为我们是在地球上观测，看到的行星运行是地球运动和行星绕日运动的综合结果。例如，当行星与地球同处在太阳一侧时，我们看到的行星运动总是逆行的。下面我们将要介绍当内行星（水、金）下合时，外行星（火、木、土）冲时，由于地球和五大行星运行速度各不同，行星在星空背景上的运行就要出现逆行。地球上观测者看到的水星、金星在恒星间运行一周的时间平均说来为 1 年，与太阳上观测结果不同。在太阳上看，水星行天一周只需 88 日，金星只要 224.7 日，即它们的公转周期。古人不明日心理论，总把地球当作不动的中心。古书记载的水星、金星一年行天一周，一日行天一度是与天象相合的。我们进行观测或查看水星、金星星历表和黄经表也会得出同样的结论。对于外行星问题不大。由于古人、今人都只能在地球上观测，所以最好不要把水金二星行天一周与公转周期相提并论，而下古人观测比较粗疏的结论。

二、地心体系与日心体系

中国天文学家可能在战国时期已经认识到行星有逆行。开始可能还只注意到火星的逆行。大概到战国末期，才发现五星皆有逆行。太史公司马迁在《史记・天官书》中说，“故甘石历五星法，惟独荧惑有反逆行。余观史记，考行事，百年之中，五星无出而不反逆行。反逆行，尝盛大而变色，日月薄食，行南北有时，此其大度也”。但中国古人，似未曾努力对它做出应有的解释。在西方，大概在公元前 4 世纪，希腊哲学家柏拉图（Plato）提出同心球理论，经亚里士多德（Aristoteles）发展成一个总的同心球体系，把地球中心说系统化。他认为，地球不动位于同心球中心，从地球向外，依次为月、水、金、日、火、木、土星和恒星天。在他的宇宙模型中，天穹是中空球体。天球层总数达到 55 个，最外一层是恒

星天。此外，在恒星天之外，又加了一个宗动天。这些球层被认为是像水晶球那样透明的，故被称之为水晶球理论。这个体系比较繁琐，又不能解释行星时亮时暗现象。约在1世纪后，古希腊天文学家阿波罗尼奥斯(Apollonius)提出了本轮均轮说。他不再使用水晶球而采用一系列本轮、均轮的圆圈。每个行星并不直接绕地球旋转，而是绕一个比较小的圆圈(叫作本轮)沿同一方向运动，本轮的圆心在环绕地球的大圆(均轮)上运行。行星在本轮上一年走一周，而本轮中心沿均轮的运行时间为该行星的恒星周期。例如，对火星，便是1年又10.5月(约687天)。这样，由此模型很容易看出，地球、火星之间距离有相当大的变化。火星处在最近处，行星是逆行的。这只需假设它在本轮上的速度比中心在均轮上运行的速度大些即可得出。

困惑了几个世纪的行星运动的逆、留之谜，总算用本轮、均轮解开了。但这还不够，行星不仅运动有逆留、亮度有强弱变化，而且速度还有疾徐的差异。公元前，希腊天文学家喜帕恰斯(Hipparchus)提出了偏心圆运动，对这个问题做了解释。他认为，太阳五星以不变的速度做圆周运动，可是地球不在圆的中心，而是偏心的。这类轨道称作偏心圆。如此，从地球上看，太阳五星运动的速度就不是均匀的，而且距离也就有远有近了。不难证明，若太阳五星绕地做偏心圆的匀速运动，那么地球和圆心的距离就等于天体做椭圆运动情况下焦点距中心距离的两倍。

公元2世纪，托勒密(Ptolemaeus)将阿波罗尼奥斯和喜帕恰斯等希腊天文学家关于五星运动的理论加以系统整理并做了补充和论证，建立起完整的地心学理论。并于公元130年记录在他的名著《数学综合论》书中。这部书后人称为《天文学大成》，阿拉伯人叫它《至大论》。书共13卷，集当时天文学成就之大成。在文艺复兴之前，此书一直被奉作天文学的经典。所以后人也一直

以托勒密为地球中心说的代表人物。

火、金二星的运动，又给古人出了另一个难题。何以这两颗行星总在太阳附近，且只能在黎明或黄昏才能被看见，而从未被人在半夜看到过。托勒密于是又不得不做了这样的假设：它们的本轮中心总是在连接日地的直线上面。这样，水、金的运动就与外行星出现了不同情况。水金本轮心在均轮上的运动每年一周，而它们在本轮上的周期却等于它们的恒星（公转）周期。因此，为了说明水金二星的运行，地心说的理论失掉了统一性，并且渗进了日心说的成分。

1543年波兰天文学家哥白尼（Nicholas Copernicus）在弥留之际，出版了他的巨著《论天体的转动》（即《天体运行论》）。在书中他用数学方法详细论证了地球运动的问题。此书全部以地球和行星绕日运动为基础，建立了系统严密的日心体系。这本书是他一生的事业。

哥白尼日心体系的基本要点是：①所有行星都沿着圆形轨道绕太阳运动；②地球与其他五星一样，是太阳的一个行星，每年绕日公转一周，轨道平面就是黄道面；③地球每昼夜自转一周，自转与公转轴方向不同，自转轴与黄道面并不垂直，而是倾斜的。

在地心体系中，行星运动变得多么复杂。为了解释行星运动的顺逆和停留，有多少个行星就要有多少个均轮和本轮。此外，为说明运行有疾徐、远近，又要假设日月五星运动是偏心的，或增加另外的次轮和小轮。在介绍清时宪历的著作中，作者将详细介绍这方面的情况。地心体系今天看来是不科学的。但做了这些假设可以解释行星的运动，并还可计算行星的位置，计算结果对于当时的肉眼观测也基本一致。所以，17世纪前，地心说支配着当时的天文学。

在哥白尼日心理论中，各个行星和地球都是没有任何停留地

沿同一方向绕日公转。行星视行的逆留及视轨迹描出的环圈，这只是我们从运动着的地球上所看到的现象而已。人们看到的行星运动，都是行星和地球绕日运动的综合结果。在所有的行星运动中都有一年的周期（在地心体系里外行星每年沿本轮旋转一周，内行星本轮心循均轮运动的周期为一年），这只是地球绕日公转运动的反映。只要假设行星公转速度距日越远越小，行星和地球相对于太阳位置时有变化。这样，行星视行有顺逆、停留，以及时远时近等问题都可迎刃而解了。哥白尼把地球当作一个行星，使它回到它真正的位置上去，于是太阳系就非常简单，解开了本轮均轮理论中纷乱无用的结子。

哥白尼学说也有它的局限性。他仍认为行星的运动是沿着圆周的等速运动。因此他虽然推翻了地心说核心的本轮，但它仍保留了许多小轮以解释行星运动中的一些比较小的不规则性。行星运动有疾徐，对于火、木、土三星，托勒密提出等距偏心轮的假设，对于水星金星，还又附加了一些更复杂的条件。在这个问题上，哥白尼沿袭了托勒密的偏心圆方法，不同的只是圆轨道围绕着的是太阳而不是地球。

哥白尼学说开始并未引起人们注意。许多天文学家都只把它当作编算行星星历表的一种方法。由于G. 布鲁诺（Giordano Bruno）和伽利略（Galilei）的宣传，才引起教会的恐慌，于1616年罗马教廷把《天体运行论》列为禁书。经过J. 开普勒（Johannes Kepler）、I. 牛顿（Isaac Newton）等人的工作，大约一个半世纪以后，日心说最终在17世纪占据了天文学的主导地位，开始了近代天文学的历程。

三、开普勒定律

德国天文学家J. 开普勒是近代天文学的主要奠基者，古代

天文学的发展是与星占学紧密联系在一起的。开普勒结束了这个时代。自此以后,天文学和星占学就彻底分家了。开普勒师从丹麦天文学家布拉赫·第谷(Brahe Tycho)。他根据第谷遗留给他的观测资料,细心地研究火星的运动。开普勒信奉哥白尼的理论,并赞同天体沿圆周运动的观点,因此他花费很多精力去探求火星的偏心圆轨道。直到17世纪初年才发现火星的轨道不是偏心圆,而是椭圆。1609年,开普勒在他的名著《火星运行论》中,发表了关于行星绕日运动的两个重要定律。

第一律,行星的轨道是椭圆,太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二律,行星向径扫过的面积与时间成正比,即向径在相等的时间内扫过的面积相等。

由第二律,可以确定行星在轨道上任意点的速度。星距日越远,速度越小。只要知道椭圆的长短轴(或其一及偏心率),即可确定椭圆的形状和面积。这样就可由一、二两律,算出任何时刻行星在轨道上的位置。这样,行星的运动由这两条定律就可以解出来了。但他认为,行星之间的运动也有一定的关系,终于在1619年,他发现并刊布了行星运动的第三律。

第三律,行星公转周期的平方与它们椭圆轨道长轴的立方成正比。

若以 T_1、T_2 表示两行星的恒星周期,a_1、a_2 为它们椭圆轨道半长径,即有下列关系:

$$T_1^2/T_2^2=a_1^3/a_2^3$$

已知行星的恒星周期时,可以算出其轨道长轴。

1687年,牛顿在其名著《自然哲学的数学原理》中宣布了一个更广泛的引力定律。由此得出,在引力作用下,天体轨道的形状除椭圆外,还有抛物线和双曲线。牛顿并且发现,维系行星作椭圆运动是来自太阳的引力。这个力就是万有引力。它作用于所

有物体之间,而不仅限于天体之间。万有引力定律可这样陈述:质量为N、m,距离为r的两个质点,互相有一种力在吸引对方,方向在质点连线上,大小与两质点质量成正比,而与其间距离平方成反比。

$$F=-k^2\frac{Nm}{r^2}$$

牛顿提出了引力定律以后,又用数学方法推出了行星绕太阳的运动定律。计算结果,牛顿得出了与开普勒由观测得到的同样的面积定律。由面积定律和能量守恒定律,在无其他外力作用的二体问题下,可以得出天体做椭圆运动的面积常数和活力公式,形式如下:

$$C^2=k^2(N+m)a(1-e^2)$$

$$v^2=k^2(N+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

k为引力常数,a为椭圆半长径,e为偏心率,N、m分别为二天体的质量,如N为太阳质量,m为行星质量。v为天体在与太阳中心的距离为r时的速度。C为面积速度的两倍,名面积常数。

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=C$$

设T为行星绕日的公转周期,行星在一日内的平均运动为$n=2\pi/T$。令M为行星在$(t-t_0)$的时间内以平均运动的速度所走的角度,称作平近点角。于是有

$$M=n(t-t_0)=\frac{2\pi}{T}(t-t_0)$$

根据面积定律,向径扫过的椭圆面积与时间$(t-t_0)$成正比,整个椭圆面积为πab,b为椭圆半短径。则单位时间内扫过的椭圆分面积为$\pi ab/T$。椭圆偏心率与长短轴之间有下列关系:

$$偏心距(半焦距)=\sqrt{a^2-b^2}=ae$$

$$e=\sqrt{a^2-b^2}/a,\quad b^2=a^2(1-e^2)$$

C 为面积速度(即单位时间扫过的椭圆分面积)的两倍。所以

$$C=2\pi ab/T=\frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

由

$$\begin{aligned}C^2&=k^2(N+m)a(1-e^2)\\&=(na^2\sqrt{1-e^2})^2\\&=\frac{4\pi^2}{T^2}a^4(1-e^2)\end{aligned}$$

得到

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=k^2(N+m)=n^2a^3$$

$$a^3/T^2(N+m)=k^2/4\pi^2$$

这是更准确化了的开普勒第三定律。

对于质量为 m_1,半长径为 a_1,公转周期为 T_1 的另一行星,同样可得出$\frac{a_1^3}{T_1^2(N+m_1)}=k^2/4\pi^2$,两式相除,可得:

$$\frac{T^2(N+m)}{T_1^2(N+m_1)}=\frac{a^3}{a_1^3}$$

这是第三定律的准确式子。它与观测相符合。如果忽略行星质量,即假设 m、m_1 为 0,就有:

$$T^2/T_1^2=a^3/a_1^3$$

这就是开普勒第三定律。因为行星质量比起太阳来甚为微小,所以开普勒定律还是足够准确的。引力常数 k 的数值为:

$$k^2=4\pi^2a^3/T^2(N+m)$$

如 a 用天文单位表示,以太阳日表示 T,用太阳质量表示 $m(N=1)$,则引力常数称高斯常数。

$$k=0.017202\approx\frac{1}{58}$$

对于地球，$a=1$，$m\approx N/300000$，$k\approx n=2\pi/T$，即地球的平均周日行度，化为弧秒得 $k=3458''.19$。在物理学中常用 cgs（厘米，克，秒）单位，在这个系统里，$k^2=6.67\times10^{-8}=1/15000000$。即，两个各为 1 克的物体，相距 1 厘米时，彼此间的吸引力为 1/15000000 达因。

为计算行星在其轨道面上的位置，方便的办法是将行星的极坐标表示为偏近点角 u 的函数。以椭圆中心为圆心，以椭圆半长径 a 做圆，时间 t 行星在轨道上的位置，由其向径 r 和真近点角 v 的数值决定。v 是行星在近日点（t_0）时的向径与 t 时的向径 r 间的夹角。过行星所在位置做垂线与拱线正交。它和大辅助圆的交点与近日点之间的圆弧，或近日点与交点在圆心的张角，称偏近点角 u。半长径和半短径分别为 a、b 的椭圆，可看作是半径为 a 的圆在和圆平面成 r 角的平面上的投影，即 $cos\gamma=b/a$。在清代雍正癸卯元时宪历计算椭圆面积时常用到这个概念。现在，将行星位置由直角坐标表示：

$$x=a\cos u,\ y=b\sin u=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

而

$$r\cos v=x-ae=a(\cos u-e)$$

$$r\sin v=y=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

因而

$$r=a(1-e\cos u)$$

$$\cos v=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u},\quad \sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}$$

因为

$$\cos v=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}}=1-2\sin^2\frac{v}{2}=2\cos^2\frac{v}{2}-1$$

$$=\sin^2\frac{v}{2}+\cos^2\frac{v}{2}-2\sin^2\frac{v}{2}$$

$$=\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}$$

所以

$$r\left(\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}\right)=a(\cos u-e)$$

$$r\left(\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}\right)=a(1-e\cos u)$$

u 用类似处理后，两式相加相减，得：

$$r\cos^2\frac{v}{2}=a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}$$

$$r\sin^2\frac{v}{2}=a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}$$

所以有

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{u}{2}$$

行星的真近点角 v 常常就从这个式子中求出。

上面已将行星坐标表为偏近点角 u 的函数，为了决定行星在 t 时的位置，须将 u 表示为 t 的函数。由面积定律有：

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=C=na^2\sqrt{1-e^2}$$

可写成

$$r^2\mathrm{d}v=na^2\sqrt{1-e^2}\mathrm{d}t$$

将上面推出的真近点角表示式微分，得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\cos^2\frac{v}{2}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

由

$$r^2\cos^2\frac{v}{2}=a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}$$

$$r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

上式可写成：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\sqrt{1-e^2}\frac{a}{r}=\frac{\sin v}{\sin u}$$

由

$$r^2\mathrm{d}v=na^2\sqrt{1-e^2}\mathrm{d}t$$

$$r=a(1-e\cos u)$$

消去 v，得：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{na}{r}=\frac{n}{1-e\cos u}$$

积分这个已分离变数的微分方程，得：

$$u-e\sin u=n(t-t_0)=M$$

这就是有名的开普勒方程。它是 u 的连续上升函数，与 u 同时从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，显然它有一个根。已知 t、t_0 时，可解出偏近点角 u。t_0 为行星过近日点时刻。可用逐次逼近法求解此式。

①先将 M 作为初值代入方程，求出 u 的第一近似值 u_1，即 $u_1=M+e\sin M$；

②再将 u_1 代入方程，得出 $u_2=M+e\sin u_1$；

③再由 $u_3=M+e\sin u_2$，解出 u_3；

④继续类似做法，直到得出的 $u_n=u_{n-1}$ 为止。一般需做三五次。当 $u_n-u_{n-1}<10^{-6}$ 时，所得 u_n 即为所求的偏近点角 u 值。

将所得 u 值代入

$$r=a(1-e\cos u),\ \mathrm{tg}\,\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}$$

得出向径 r 和真近点角 v。至此就可以得出行星在它的轨道平面

上相对于太阳的位置。

对于一切椭圆轨道都可用逐次近似法求解 u。如果把 u、r、v 展开为偏心率的乘幂函数，这时展开式中的系数都是平近点角 M 的周期函数，因而是时间的函数。这一特点使得可以不必求解开普勒方程而来确定 r、v。对于许多应用提供很大方便。不难证明，通过偏近点角的傅利叶级数形式和面积定律、开普勒方程，可得到中心差 $(v-M)$ 和 $\frac{r}{a}$ 的展开式

$$v=M+\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M$$

$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M+\frac{103}{96}e^4\sin 4M+\cdots$$

$$\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}-\left(e-\frac{3}{8}e^2\right)\cos M-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}e^4\right)\cos 2M$$

$$-\frac{3}{8}e^3\cos 3M-\frac{1}{3}e^4\cos 4M-\cdots$$

由此得到的 r、v 与解开普勒方程结果是一致的。

平近点角 $M=n(t-t_0)$，所以中心差 $v-M$ 的极大值出现在 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-n=0$ 的时候。由

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M}=\frac{\mathrm{d}v}{n\mathrm{d}t}=\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

即发生于 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=n$，$r^2=a^2\sqrt{1-e^2}$，即 $r=a(1-e^2)^{1/4}$ 之时。由

$$r=a(1-e\cos u),\quad r\cos v=a(\cos u-e)$$

可求出当 $r^2=a^2\sqrt{1-e^2}$，即 $r=a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ 时，

$$e\cos v_{\mathrm{m}}=(1-e^2)^{3/4}-1$$

$$e\cos u_{\mathrm{m}}=1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$$

由此式求出 u_m，再由开普勒方程得到 M_m，最后算出最大中心差 $v_m - M_m$。这样，所有在椭圆轨道上运行的行星和卫星，只要根据轨道偏心率，就可算出它们轨道运动中最大中心差数值。由 $arc\cos v_m$ 的展开式可将 v_m 表示为 e 的展开式，同理可得到 u_m、M_m 及最大中心差 $v_m - M_m$ 的展开式。

$$v_m = 90° + \frac{3}{4}e + \frac{21}{128}e^3 + \frac{3409}{40960}e^5 + \frac{97875}{1835008}e^7 + \cdots$$

$$v_m - M_m = 2e + \frac{11}{48}e^3 + \frac{599}{5120}e^5 + \frac{17219}{229376}e^7 + \cdots$$

轨道上 r 为极小和速度 v 为极大之点叫近日点，即圆锥曲线上最接近太阳的顶点。近日距是 $q = p/(1+e)$。对于椭圆运动，设 a、b 为轨道半长轴、半短轴，a 与参量 p、偏心率 e 的关系为 $a = p/(1-e^2)$。所以

$$q = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} = a(1-e)。$$

开普勒方程 $u - e\sin u = M = n(t - t_0)$，当 $t = t_0$ 时，可看出相应的偏近点角 u 为 0。而

$$r = a(1 - e\cos u)$$

当 u 为 0 时，$r = a - ae = a(1-e) = q$。此时 r 为最小值 q，即行星在近日点。故 t_0 为行星过近日点的时刻。

四、轨道根数和星历表的计算

行星都在黄道附近、黄道带内运行（冥王星稍远），但它们的轨道面并不与黄道重合。为完全描述行星的运动，必须确定 6 个基本数值，此 6 个量称作行星的轨道根数。

因行星绕日公转，所以取太阳作为坐标原点，黄道面作为基本平面，春分点当作黄道面内的计量起点。这就是日心黄道坐标系。

从太阳上观测行星在星空的视运动，行星在星空走过的轨道

不与黄道重合，轨道面与黄道面的交角称作轨道交角 i，轨道面与黄道面在天球上的两个交点，其中行星由黄道南进入黄道北经过者称升交点 N，以 Ω 表示升交点的黄经。知道了 i、Ω，行星轨道的位置便确定了。所以 i、Ω 为行星轨道的第一、第二个轨道根数。要确定行星椭圆轨道的形状，还需知道行星近日点的方向和轨道半长径及偏心率。设 p 为行星近日点的方向。近日点与升交点在轨道上的弧长叫作近日点的升交距角，记作 ω，是第三个轨道根数。以 π 来表示近日点的升交距角 ω 与升交点黄经 Ω 之和。π 称作近日点黄经。$\pi=\omega+\Omega$，这是一段折弧。因为 ω 角的测量是在行星轨道上，Ω 的量度是在黄道上。第四、第五个轨道根数就是椭圆偏心率 e 和半长轴 a。这样，行星轨道的位置、形状、大小就完全确定了。由开普勒第三定律 $n^2a^3=k^2(N+m)$，平均运动 n 或运行周期皆可由半长轴 a 算出来。而 n 要出现在平近点角 M 的计算中，所以有时也以 n 作为第五个轨道根数。为了确定 t 时的行星位置，应该知道某一次行星过近日点的时刻 t_0 或黄经位置，亦即历元时刻 t_0 或黄经 L_0。这是第六个轨道根数。设 M 和 υ 分别表示平近点角与真近点角，即行星与近日点的平、真距角。行星的平黄经等于 $\pi+M$，真黄经等于 $\pi+\upsilon$。这两个角的计量与 π 的计量相同，一部分是在黄道，一部分是在行星轨道面上。平黄经 $\pi+M$ 之值等于 L_0+nt，即

$$\pi+M=L_0+nt,\quad M=L_0+nt-\pi$$

由开普勒方程或展开式，根据 $L_0-\pi$、n、e 及 t，便可以决定向径 r 和真近点角 υ。如此，行星的运动和位置就可完全决定了。

根据这 6 个轨道根数($\Omega, i, \pi, e, a, t_0$)，可以计算任何时刻行星的位置。这项工作叫作星历表的计算。至于怎样依据观测得来的天体位置求出轨道的这 6 个根数，这是天体力学中的轨道计算和确定的问题，是更为困难的。一般由相近的三次观测得到的

天体位置，可以计算求出这 6 个根数的近似值。求出初轨，以后再加以改正。这就是天文学常说的三次观测定轨道，通过几次观测确定轨道对于发现新的行星、小行星、彗星是非常重要的方法。

下面介绍计算星历表的过程。

(一)计算行星的日心球面坐标 l、b

设 t 时行星在日心黄道坐标系中的黄经为 l，黄纬为 b。l 是过行星的黄经圈与黄道的交点与春分点的距弧；黄纬 b 是沿黄经圈行星与黄道的距弧，向北为正。行星与升交点的距角为 $\upsilon+\omega$，υ 为真近点角，ω 为近日点的升交角距。在由行星、升交点及过行星的黄经圈与黄道之交点组成的球面直角三角形中，可得出：

$$\sin b=\sin i\sin(\upsilon+\omega)$$

$$\cos b\cos(l-\Omega)=\cos(\upsilon+\omega)$$

$$\cos b\sin(l-\Omega)=\cos i\sin(\upsilon+\omega)$$

对于椭圆轨道，有：

$$r\cos\upsilon=a(\cos u-e),\ r\sin\upsilon=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

式中的偏近点角 u，可由开普勒方程求出。据前面介绍的方法，可得出 r、υ。由 υ 及轨道根数 i、ω、Ω，可由上式计算行星日心球面坐标 l、b。

(二)计算行星的日心直角坐标 x、y、z

日心直角坐标是这样选取的，以太阳为坐标系原点；x 轴指向春分点；y 轴在黄道平面上，从 x 轴沿行星运动方向(自西向东，反时钟向)旋转 90°；z 轴指向黄极。设行星的向径为 r，则它的日心直角坐标为：

$$x=r\cos b\cos l,\ y=r\cos b\sin l,\ z=r\sin b$$

它们可由前面得到的 r、b、l 求出。

(三)计算行星的地心直角坐标 ξ、η、ζ

通常我们所求的是行星的视位置,故需要把坐标原点平移到地球中心。

设在日心黄道坐标系中,用 x_0、y_0、z_0 和 r_0、l_0、b_0 分别表示地球的直角坐标和球坐标。它们之间的关系为:

$$x_0=r_0\cos l_0\cos b_0,\ y_0=r_0\sin l_0\cos b_0,\ z_0=r_0\sin b_0$$

设 ρ 为行星与地心的距离。根据坐标平移变换原理,行星的地心黄道直角坐标 ξ、η、ζ 与 x、y、z 的关系是:

$$\xi=x-x_0,\ \eta=y-y_0,\ \zeta=z-z_0$$

再设 $x_\odot$、$y_\odot$、$z_\odot$ 和 $r_\odot$、$l_\odot$、$b_\odot$ 表示太阳的地心黄道直角坐标和球坐标。由日地关系有

$$l_\odot=l_0+180°,b_\odot=-b_0$$

所以

$$x_\odot=r_0\cos l_\odot\cos b_\odot=-x_0$$

$$y_\odot=r_0\sin l_\odot\cos b_\odot=-y_0$$

$$z_\odot=r_0\sin b_\odot=-z_0$$

如此,上式可写成

$$\xi=x+x_\odot=x+r_0\cos l_\odot\cos b_\odot$$

$$\eta=y+y_\odot=y+r_0\sin l_\odot\cos b_\odot$$

$$\zeta=z+z_\odot=z+r_0\sin b_\odot$$

太阳的黄经 $l_\odot$、黄纬 $b_\odot$、矢径 $r_\odot$ 可由纽康表得出。由前面介绍的开普勒方程及 r、v 的解法及中心差 $v-M$、$\frac{r}{a}$ 的展开式中,代入地球轨道偏心率 e 及 t 时的平近点角 M,也可很方便地计算黄经和矢径。而太阳的黄纬 $b_\odot$ 很小,一般不超过 1″,故取作 0,这样很容易得出 $x_\odot$、$y_\odot$、$z_\odot$,从而得到 ξ、η、ζ。

(四)计算行星的视位置

行星的黄道地心球坐标$(\rho、\lambda、\beta)$，在算出$\xi、\eta、\zeta$后就很容易由下式得出：

$\xi=\rho\cos\lambda\cos\beta,\eta=\rho\sin\lambda\cos\beta,\zeta=\rho\sin\beta$ 由上式可知：

$$\mathrm{tg}\lambda=\frac{\eta}{\xi}$$

$$\sin\beta=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

得出地心黄经黄纬后，由下列黄道赤道坐标变换公式计算赤经α、赤纬δ。

$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda$$

$$\cos\delta\sin\alpha=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

$$\sin\delta=\cos\varepsilon\sin\beta+\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda$$

$x、\xi$的符号为正，$y、\eta$亦为正，则$l、\lambda$在第一象限；$y、\eta$为负，$l、\lambda$在第四象限；若$x、\xi$为负，$y、\eta$亦为负，则$l、\lambda$在第三象限；$y、\eta$为正，则$l、\lambda$在第二象限。$b、\beta$与$z、\zeta$同号。得到的$\alpha、\delta$经光行差、岁差、章动修正后，得出行星的视位置。

五、五星的地心运动

行星绕日一周的公转周期为恒星周期。对于地球上的观测者，内行星(水、金星)在恒星背景上行天一周所用的时间，与它们的公转周期并不相同。以地球为中心，地球和行星与地球和太阳连线之间的交角在黄道上的投影称为行星的距角。距角为零时，称作合。是时行星与太阳的黄经相等。行星按同一方向运动连续两次处于同一距角所经历的时间，叫作行星的会合周期。一般规定它为行星与地球连续两次日心合的时间间隔。由以上定义

可知，行星在恒星间的平均运动 $n \doteq 2\pi/T$。T 即为公转或恒星周期。公转(恒星)周期 $T=360°/n$。以地球和行星的平均运动之差除 360°，就得出会合周期 θ，即：

$$会合周期\ \theta=\frac{360°}{|n'-n|}$$

其中 n' 为地球的平均运动(3548″.1928)。会合周期也可由会合运动方程得出，这一点我们以后介绍。

设 p、p' 分别表示行星和地球。它们与太阳的距离分别为 a、a'，平均运动为 n、n'，椭圆运动速度 v 为：

$$v^2=k^2(N+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

前面由面积速度消去 C，得出过下式：

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=n^2a^3=k^2(N+m)$$

则有

$$v=na\sqrt{\frac{2a-r}{r}}=na\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

r' 为椭圆轨道上对第二焦点的向径。$r+r'=2a$，这是椭圆的基本性质。当行星经过轨道的短轴两端时，$r'=r$，则 $v=na$。

由开普勒第三律 $n^2a^3=n'^2a'^3$，可写成 $na\sqrt{a}=n'a'\sqrt{a'}$，由此得出：

$$v'/v=n'a'/na=\sqrt{a}/\sqrt{a'}$$

即，两行星的线性速度比与其距离的平方根成反比。行星轨道越近地球，速度越接近，其会合周期就越长。所以金星火星的会合周期较长。

行星速度与距日平方成反比。距日越远速度越小。不同轨道行星的速度总是不同的。因此，当行星与地球同在太阳一侧相合时(日心合)，行星的地心运动必然是逆行的。外行星冲时或内

行星下合时就是这种情况。这时，行星的地心黄经每日变率可由下式求得：

$$\Delta_1\lambda=\frac{-na}{a-a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}-1\right)$$

令

$$v/v'=\sqrt{a'/a}=q$$

则

$$\Delta_1\lambda=\frac{n}{q+q^2}$$

另一方面，当行星和地球分列太阳两侧时（日心冲），行星的相对运动总是自西向东顺行。因此，外行星处在合，内行星当上合时，行星一定是顺向运行。这时行星地心黄经的每日变率为：

$$\Delta_2\lambda=\frac{na}{a+a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}+1\right)=n\frac{1+q}{q+q^3}$$

行星的地心运动有时顺行有时逆行，交替之际，行星有一段时间好似不动，称作留。留时它的黄经适在相对的极大和极小之际。不难证明，当行星和地球的日心黄经差满足下式时，行星呈现留。

$$\pm tg(L'_s-L_s)=\frac{q-1}{q}\sqrt{1+q^2}$$

由于留时，$L'-L$ 角的数值可由此式算出，因而容易推出逆行总共经历的时间为：

$$T_s=2\frac{L'_s-L_s}{|n'-n|}$$

还可证明，在留时内行星与太阳的距角及外行星与太阳距角之余角 l_s，可由下式得出：

$$\pm tgl_s=\frac{a'}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a'}{a}}}=\frac{q^2}{\sqrt{1+q^2}}$$

以逆行期间地球日心黄经改变的弧长 nT_s 减 $2l_s$ 弧得逆行弧，为两个留点之间的地心黄经差，即：

$$逆行弧=2l_s-nT_s$$

对于内行星这段弧内包括一个下合，对外行星则含一次冲。逆行弧长即为行星在天球上视轨迹所描述的环圈的平均幅度。表 5－16 提供五星及地球公元 2000 年的轨道根数，最大中心差及对应的真、平近点角和向径值，以及它们的平均运动、公转、会合周期，与地球的速度比。表 5－17 记载五星冲、合时地心黄经的每日变率 $\Delta_1\lambda$、$\Delta_2\lambda$ 和留时的 L'_s-L_s，与太阳距角 l_s（外行星与太阳距角的余角）及逆行时间和逆行弧长。

表 5－16　五星地球轨道特征根数(2000)速度周期

	a	e	$i(°)$	$\pi(°)$	$\Omega(°)$	$(v-M)_m$	v_m
水星	0.3871	0.2056	7.0050	77.4561	43.3309	23°41′	98°55′
金星	0.7233	0.0068	3.3947	131.5637	76.6799	0°47′	90°18′
地球	1.0000	0.0167	0.0000	102.9373		1°55′	90°43′
火星	1.5237	0.0934	1.8497	336.0602	49.5581	10°42′	94°1′
木星	5.2026	0.0485	1.3033	14.3313	100.4644	5°32′	92°5′
土星	9.5550	0.0555	2.4889	93.0568	113.6655	6°24′	92°24′
	M_n	r_n/a	n''	v km/sec	$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{a'}{a}}=q$	T(日)	θ(日)
水星	75°14′	0.98926	14732.4	47.89	0.6222	87.969	115.88
金星	89°31′	0.99999	5767.7	35.03	0.8505	224.701	583.92
地球	88°48′	0.99993	3548.2	29.79	1.0000	365.256	
火星	83°19′	0.99782	1886.5	24.13	1.2344	689.980	779.94
木星	86°32′	0.99942	299.13	13.06	2.2809	4332.59	398.88
土星	86°00′	0.99922	120.45	9.64	3.0911	10759.2	379.09

表 5—17　五星逆行、留平均数值

	下合	上合	$L'_s - L_s$	l_s	逆行弧	逆行期(日)
	$\Delta_1\lambda$	$\Delta_2\lambda$				
水星	$-3516''$	$+6669''$	35°34′	18°12′	13°49′	22.9
金星	$-2254''$	$+4480''$	13°0′	28°51′	16°9′	42.2
	冲	合				
火星	$-1286''$	$+2545''$	16°47′	136°12′	15°57′	72.7
木星	$-474''$	$+823''$	54°26′	115°35′	9°58′	120.6
土星	$-281''$	$+445''$	65°32′	108°46′	6°47′	137.7

内行星距太阳比地球近，从地球上看，内行星在轨道上任何位置，它与太阳的距角都超不过某一定范围。如不考虑行星轨道的偏心率和倾角，最大距角发生在日星地组成直角三角形时。行星和地球与行星和太阳连线成直角，从地球看此时星日间的张角最大，称作大距。在太阳东为东大距，在西称西大距。设 L、L' 为星与地的日心黄经，则大距时有：

$$\cos(L'_g - L_g) = a'/a = q^2$$

大距即星日之间最大的角距，为 $L'-L$ 的余角。中间为下合的东西大距之间所经历的时间为 $2\dfrac{L'_g - L_g}{n'-n}$。由此得出，水星大距时距日 22°46′，大距间的间距为 43.3 日；金星大距时与日角距为 46°20′，东西大距相隔 141.7 日。由于轨道之偏心率，实际上水星大距最大可达 27°.8，金星可达 47°.8。在远日点大距时，角距要大于平均值。由于水星偏心率较大，这种情况尤为明显。反之，若大距发生于近日点时，行星与太阳的角距要小于平均值。

外行星距太阳比地球远，因而它的地心运动与内行星不同。在一个会合周期内，距角可从 0°到 360°。当距角成 90°时称为方照。从地球看，行星对于太阳位在西方称西方照；行星位于太阳东方叫东方照。行星在方照时，行星上的观测者看见地球在大距。地球和太阳与地球和行星的连线成直角。因此可用下列公

式去求地球与行星的日心黄经差：

$$\cos(L'_g - L_g) = 1/q^2$$

中间有同一冲的西东两方照之间所经历的时间则为 $2\dfrac{L'_g - L_g}{n' - n}$。这段时间对于接近地球的行星很长，到了距离为 5 天文单位的天体为极小，然后缓慢增加。当半长轴无限增长时，达到半年(182.6 日)为其极限。由此得出，火星方照时，地球与行星的日心黄经差为 48°59′，西东两方照的平均间隔为 212.2 日；木星相应的日心黄经差为 78°55′，平均间隔是 174.9 日；土星则分别为 84°00′和 176.4 日。这里列出的只是平均值，由于偏心率和倾角，实际数字可能相差很大，特别是在偏心率显著的火星，情况更是如此。

现在简单介绍内行星的地心运动。距角为 0 时，即太阳、行星的地心黄经相等时称作合。星、地分在太阳两侧者，叫上合；星在日地之间者，称下合。内行星一个会合周期内有一次上合，一次下合。上合后，水星平均 36 日，金星平均约 220 日到达东大距。合时，星光为日光所淹没看不到。内行星运行较地球快，合以后行星走到太阳之东。几天后，在太阳落山后，它出现在西方天空，为昏星。大距后，水星平均约 11 日、金星约 51 日，地心运动停止顺行，出现留。留后水星大约逆行 11 日、金星逆行 21 日，星与日下合，又看不到了。下合后相同的现象循逆向发展，即经过留及西大距，此时行星于黎明前晨见东方，为晨星。最后再回到上合，完成一个会合周期。

火、木、土地外行星的地心运动情况如下：行星的地心黄经与太阳相等时，与太阳相合，因而不能看见。这时星、地分居太阳两侧。外行星距日较地球为远，合后，它偏离太阳，落在太阳之西，因而呈现晨见东方。以后，与太阳的距角日益加大。当距角达90°时，行星处在西方照。这时星在夜半出东地平，地方时卯时中天。顺行速度逐渐减慢，而后停止顺行，呈现留。留后行星逆行

而到达冲。冲时地球位于星日之间。冲后，相同现象循逆向发展。开始仍为逆行，渐减慢、停止而至留，再顺行到东方照。此时行星于酉时中天，上半夜可见。最后与日又一次相合，完成一个会合周期。

行星的地心运动，是由于地球与行星绕日公转的综合结果。再考虑到行星的轨道倾角，所以行星在恒星背景上的视行便是一种蜿蜒的环圈式的(内行星多呈此状)或呈现为之字形的蛇行轨道。其环圈和摺曲幅度即为逆行弧，前后转折点，即为留点。

在一个会合周期里行星在星空行天一周以上的只有火星。木星、土星两冲之间在黄道上经过的弧不长。它们的平均值为：火星 408°.7；木星 33°.1；土星 12°.7。

火星轨道偏心率很大，一般不能根据它的会合周期去预推其地心运动的各种动态的准确日期。

第七节　步五星术

一、基本法数

四分历步五星先计算行星与日相合时刻所在的月日和星度，然后根据动态表求出行星在某一时刻所处会合运动中与太阳、地球的相对位置和对应的黄道、赤道星度。对每一行星给出会合运动的各项基本数据及在一会合周期内顺逆、留伏、疾徐各类视行动态的时段和行度。

术文对五星会合运动的基本法数的组成及相互关系做了说明。行星与日同宿同度谓之相合。连续两次合日的时间间隔为一会合周期，古历称作一合、一终、合终。将会合周期的日数与一岁的日数(周天之度数)通分相约，得周率和日率。于是有：

周率×会合周期日＝日率×周天度

对于火、木、土星这个关系是对的。四分历将水金二星的会合周期一分为二:上合至下合、下合至上合皆称一合。对于水星、金星关系为:

$$\text{周率}\times\frac{1}{2}\text{会合周期}=\text{日率}\times\text{周天度}$$

周率、日率确定后,其他法数皆可由此得出。

$$\text{月法}=\text{章法 }19\times\text{周率}$$

$$\text{章月}\times\text{日率}/\text{月法}=\text{积月}+\text{月余}/\text{月法}$$

以章法 19 除章月 235,为一年的月数。因此上式显然为火、木、土三星会合周期所当的月及分数,即以月表示的会合周期长度。亦为水星、金星半会合周期(上合至下合或下合至上合)的月数。

$$[\text{朔策}(29\frac{499}{940})\times\text{积月}/60]_R=\text{朔大余}+\frac{\text{朔小余}}{940}$$

$$\text{日度法}=\text{日法 }4\times\text{周率}$$

$$\text{虚分}=\text{蔀月 }940-\text{朔小余}$$

$$\frac{\text{蔀日 }27759\times\text{月余}+\text{月法}\times\text{朔小余}}{\text{章法 }19\times\text{章月 }235\times\text{日度法}}=\text{入月日}+\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}$$

$$\frac{\text{周天 }1461}{\text{日度法}}\times(\text{日率}-\text{周率})=\text{积度}+\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}$$

五星日率相约取其公倍数得 2999162158026300,为五星同时与日相合之时。可视作五星会合的太极上元或计算起点。以上得出的周率、日率,合积月、月余,月法,星合月朔大余、小余、虚分,入月日、日余,日度法,积度、度余等为四分历五星推步的基本法数。

二、推五星合日术

(1)推星合年:

$$\text{距元年}\times\text{周率}/\text{日率}=\text{积合}+\text{合余}/\text{日率}$$

合余小于周率,星合其年;以周率除合余,得数为所求年前冬至距其前星合之年数。得 1,星合其前一年;得 2,星合其前二年。五

星中只有火星，其会合周期为780日，大于2年，会出现星合其前二年的情况。木星、土星有时星合其前一年。金星会合周期583.92日，但古历水、金二星合日周期一分为二，以其二合（上合至下合、下合至上合）为一终。天正冬至前之合总在当年。内行星（水、金）上合时星为顺行，星行较日为速，合后星居日东，日没后星见西方，为昏星；下合时内行星视运动为逆行，合后日在星东，日出前星见东方，为晨星。四分历五星运动以合日起算，内行星从上合开始（夕合）。故术文说，“金、水积合奇为晨，偶为夕”。所求年天正冬至后之星合，与天正冬至相距为度分，“其不满周率者反减之，余为度分”。即，度分＝周率－合余。

(2)推星合月：

$$小积＝合积月(法数)\times 积合$$

$$\frac{月余(法数)\times 积合}{月法(法数)}=N+\frac{月余}{月法}$$

$$积月＝小积+N$$

$$入纪月=[积月/纪月\ 18800]_R$$

积月满纪月去之，余为入纪月。

$$\frac{入纪月\times 章闰\ 7}{章月\ 235}=闰月+\frac{闰余}{章月}$$

$$[(入纪月-闰月)/12]_R=入岁月数$$

从天正十一月起计数入岁月数，十一月不计入，所得即星合所在月。闰余为224～231者，星合闰月。

(3)推星合月朔日大小余：

$$\frac{蔀日\ 27759\times 入纪月}{蔀月\ 940}=积日+\frac{小余}{蔀月}$$

$$星合月朔日大余=[积日/60]_R$$

得数，依干支序数从甲子数起（甲子不计），为星合月朔日干支。

(4)星合入月日：

$$\frac{\text{蔀日 }27759\times\text{月余}+\text{月法(法数)}\times\text{朔小余}}{\text{章法 }19\times\text{章月 }235\times\text{日度法(法数)}}$$

$$=\text{入月日}\frac{\text{日余}}{\text{日度法}}$$

自朔日(朔日不计)计数入月日,所得为星合日。

(5)推合度:

$$\frac{\text{周天 }1461\times\text{度分}}{\text{日度法(法数)}}=\text{积度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}$$

从斗 $21\frac{1}{4}$度计数积度,算外(斗 21 度不计),得数为星合所在度。

(6)求星合岁天正冬至日:

距元年减 1,满 80 除去之,余 n,以没数 21 乘之,满日法 4 得 1,为大余,不尽为小余。以甲子命大余,则星合数天正冬至日也。即:

$$[(\text{距元年}-1)/80]_R=n$$

$$n\times 21/4=\text{大余}+\text{小余}/4$$

大余满 60,去之。自甲子数起,甲子不计,所得为天正冬至日干支及小余。

(7)求至后星合日数:

$$\text{至后星合日数}=\frac{\text{周天 }1461\times\text{度分}}{\text{日度法(法数)}}+\text{冬至小余}$$

为所求年天正冬至子夜与其后星合相距的时日。上式去冬至小余,为冬至与其后星合之时距。

以上(6)、(7)两步为计算星合的又一种方法,须与第 1 步推星合年配合使用。推星合年得出所求年天正冬至前之星合,(6)、(7)计算天正冬至后之星合。配合使用时,后者距元年须减 1。所得结果两法完全相同。

(8)求后合所在月:

$$\text{合积月(法数)}+\text{入岁月数}+\frac{\text{月余(法数)}+\text{月余}}{\text{月法(法数)}}$$

$$= 后合月数 + 余数/月法$$

由前合入岁月数及月余加一个会合周期(合积月及月余)即得后合月数。依前法计数,得后合所在月。其中有闰月须计入。内行星(水、金)二合为一终,其合积月和月余法数为一合(上合至下合或下合至上合,半个会合周期)之数。故由上式所得之后合月,前合为晨合者后合为夕合;前合为夕合者加后为晨合。

(9)求后合月朔日:

前合朔日大小余加法数大余、小余即得。因合日不一定在朔日,一合之月为合积月与月余之和。法数大、小余乃积月乘朔策去 60 之余。如前合月余加法数月余满一月,则大余另加 29,小余加 499,即有:

后合朔日大、小余

$$= 前合大余 + 法数大余 + \frac{前合小余 + 法数小余}{蔀月 940}$$

若前合月余加法数月余之和大于月法,则:

后合朔日大小余

$$= 前合大余 + 法数大余 + 29 + \frac{前合小余 + 法数小余 + 499}{蔀月 940}$$

小余满蔀月 940,进位为大余。大余自甲子计数,甲子不计入,所得即后合月朔日干支。

(10)求后合入月日:

后合入月日

$$= 前合入月日 + 入月日(法数) + (前合入月日日余 + 日余法数)/日度法$$

前合月朔小余大于虚分(法数)者,因后合朔日已进一日,故空(少)加一日,所得日满朔策时先去 29,后合月朔小余不足 499 者,又减 1 日。入月日自朔计数,朔不计入,所得即后合日。

(11)求后合宿度:

后合宿度＝前合所在度＋积度(法数)

＋(前合度余＋度余法数)/日度法

三、五星会合周期内视运动

火、木、土三颗外行星，在会合周期(一终)内的视运动大致相似。合日时与日同经，同升同落，看不见，称作伏。星行迟于日，伏后星在日西十余度，晨见东方。顺行若干日，与日距离拉远；速度减慢而留；留后逆行过冲(与日相距 180°)，复留；留后顺行，星在日东，太阳逐渐追上行星，夕伏西方，而再次合日。即：

合－晨伏－晨星－顺行－顺迟－

留－逆行－留－顺行－夕伏－合

内行星(水、金)一终为两合，视运动动态为：

下合－晨伏－晨星－逆行－留－顺－晨伏－上合

上合－夕伏－昏星－顺行－留－逆－夕伏－下合

以木星为例，它在会合周期内的视运动和行度如下：

合日，晨伏 16 日 7320.5 分，行 2 度 13811 分，在日后(西)，而见东方。

太阳日行 1 度，伏 $16\frac{7320.5}{17308}$日，日行 $16\frac{7320.5}{17308}$度，星行 $2\frac{13811}{17308}$度。日星行度相减，得星在日西 13 度 10817.5 分 ($13\frac{10817.5}{17308}$度)。

见顺，星日行 11/58 度，58 日行 11 度。

太阳 58 日行 58 度，加前行 16 度许，日共行 $74\frac{7320.5}{17308}$度。星 58 天行 11 度，加前行 2 度许，共行 $13\frac{13811}{17308}$度。日星行度相减知星在日西 $60\frac{10817.5}{17308}$度。

微迟，星日行 9 分，58 日行 9 度(度 58 分)。

这一段日比星多行 49 度。加其前两段多行之值，日在星东 $109\ \frac{10817.5}{17308}$ 度。

留不行，25 日。星留不行，而日行 25 度。留后星在日西 134 度 10817.5 分(以 17308 为分母)。

旋逆，星日行 1/7 度，84 日退 12 度，复留 25 日。

逆、留段太阳共行 109 度，而星退 12 度。这一进一退日星又拉大差距 121 度。加前面伏、顺、迟、留日星距度，得日在星前 $255\ \frac{10817.5}{17308}$ 度。

复顺，58 日行 9 度，又 58 日行 11 度，在日前 13 度有奇，而夕伏西方。

此顺段分顺迟和顺疾两部分，星共行 20 度，而日行 116 度。日比星多行 96 度。加前积日星距度，得 $351\ \frac{10817.5}{17308}$ 度。为日在星西、星在日前 13 度 10817.5 分($365\ \frac{4327}{17308} - 351\ \frac{10817.5}{17308} = 13\ \frac{10817.5}{17308}$)。此时，星光为日光所淹，而夕伏西方。

除伏逆，一见 366 日，行 28 度。

自星见至夕伏，历经顺 58 日 11 度，迟 58 日 9 度，留 25 日，逆 84 日，退 12 度，留 25 日，复顺 58 日 9 度及 58 日 11 度，共历 366 天，星行 28 度。

伏复 16 日 7320.5 分，行 2 度 13811 分而与日合。凡一终，398 日又 14641 分，行星 33 度 10314 分，通率日行 398/4725 度。

晨与夕伏各 $16\ \frac{7320.5}{17308}$ 日，星各行 $2\ \frac{13811}{17308}$ 度，共长 $32\ \frac{14641}{17308}$ 日，行 $5\ \frac{10314}{17308}$ 度。加一见日数和行度，得一终(会合周期)长

$398\ \frac{14641}{17308}$日，行星 $33\ \frac{10314}{17308}$度。通之，将一终日数和行星化为日分和度分，分别得出一终日分为 6903225，一终星行度分 581478，两数相约得 1461 为周天数。以约一终日分得 4725 为法，以约星行积分得 398 为实，实不满法，以法命之，得星日行 398/4725 度。即以一终日数除一终行星所得之商(或以一终积日分除一终行星积度分)。以通率日行除全天度数 365.25 度，得以日表示的行星的恒星周期。

其他四星(水、金、火、土)与此类似，不赘述。根据五星动态和行度，就可得到任何时刻五星的视运动情况和位置。星合之时，星日同度。如由前面的介绍，即可求得木星每日的动态和星度。这个推步过程四分历称作“步术”。方法如下：

(1)求星见日度：

晨见日＝星合日、余＋晨伏日、余

星晨见度＝星合所在度分＋伏行度分

(2)求各动态星度：

因在会合周期内，行星视行速度不同。四分历用不同的分母表示各动态段的行分，顺段星度当加、逆段需减。为方便分数加减，需要通分。伏段星行度分五星皆以各自日度法表示。要和其后各行段星行度分相加减，将日度法为分母改成以行段度分值为分母的星见度分，有：行段分母表示的星见度分＝行分母×见度分/日度法，所得度分在半日度法以上进 1，已下舍之。当顺段，日加所行分，满行段分母得 1 度。行段顺逆、疾徐度法不同(分母不一)，采用和上式类似的方法通分，即：当行之母表示的星见度分＝当行之母×故分/故母。如星当逆行段，则以逆行段之分母为当行之母，此前顺段之母为故母，其前不足故母的度分为故分。如此，就将以故母为分母表示的度分(故分)，换成以当行之母表示的新度分了。计算星所在度分，留段时仍承前顺行度分，至逆

行段则须减之。这样，就可得出行星在任一动态段中的星度。伏时，因星不可见，故通常不注明伏段星的宿度。星所在度以斗 $21\frac{1}{4}$度命度。此$\frac{1}{4}$度亦按上法通分而减。计算中度分如有按上述方法舍入(损益)者，应前后照应，消长折衷。按四分历二十八宿赤道宿度满宿度者去之，至不满，得星所在赤道宿度。依黄赤道宿度进加退减，得星所在黄道宿度。

四、四分历推五星合日计算实例

以木星为例，用四分历方法计算自元和二年至永元四年 8 年间木星合日的时刻和所在宿度。每次合日都用推星合所在月日及推星合在天正冬至后的日数两种方法计算。推算依据前面介绍的方法和公式。推步程序和结果列于表 5－18。

计算表明，两种方法推算的结果完全一致。先推算天正冬至，再求天正冬至后星合日数的方法更简单一些。

为了考查四分历步五星术的合天情况，我们用现代天文方法计算了其时木星真实的合日时刻和位置。结果也列于表 5－18 中。四分历推得的星合日期和所在星度，按表列二十八宿赤道、黄道宿度得出的为赤道宿度和极黄经宿度。极黄经与黄经距度对于距黄道较远的星宿差别较大。表中为了比较极黄经已做了改正。四分历计算的星合日期与实合平均相差 6.28 日。星合位置平均约有 8°.16 的偏离。四分历给出的冬至点的赤道，黄道位置约大 3°。平合位置是根据冬至在斗 $21\frac{1}{4}$度(赤道度)和斗$19\frac{1}{4}$(黄道度)推得的。考虑到这一点，四分历得出的星合位置实际上平均约有5°.35的误差。

表 5—18 元和二年(85)至永元四年(92)木星合日时刻和所在宿度

纪年	元和二年	元和三年	元和四年	章和二年	永元元年	永元二年	永元三年	永元四年
距元	9365	9366	9367	9368	9369	9370	9371	9372
积合	8576	8577	8577	8578	8579	8580	8581	8582
合余星合	755 当年	357 当年	4684 去年	4286 当年	3888 当年	3490 当年	3092 当年	2694 当年
小积	111488	111501		111514	111527	111540	111553	111566
N	4340	4340		4341	4341	4342	4342	4343
月余	8636	50242		9635	51241	10634	52240	11633
积月	115828	115841		115855	115868	115882	115895	115909
入纪月	3028	3041		3055	3068	3082	3095	3109
闰,闰余	90 46	90 137		91 0	91 91	91 189	92 45	92 143
入岁月数	10	11		0	1	3	3	5
星合月	九月	十月		十一月	十二月	二月	二月	四月
合朔大小余	19 392	43 299		36 705	0 612	54 78	17 925	11 391
儒日	1752030	1752414		1752827	1753211	1753625	1754008	1754422
入月日	3.519	18.365		4.211	19.057	3.903	19.749	4.595
后合月余数	23 50242	25 9635		13 51241	15 10634	16 52240	17 11633	18 53239
$\frac{距元-1}{80}$	$117\frac{4}{80}$	$117\frac{5}{80}$		$117\frac{7}{80}$	$117\frac{8}{80}$	$117\frac{9}{80}$	$117\frac{10}{80}$	$117\frac{11}{80}$
冬至大小余	21.00	26.25	31.50	36.75	42.00	47.25	52.50	57.75
儒日	1751732	1752097		1752827	1753193	1753558	1753923	1754288

续表

纪年	元和二年	元和三年	元和四年	章和二年	永元元年	永元二年	永元三年	永元四年
度分	3572	3970		41	439	837	1235	1633
至后星合日数	301.5191	335.1150		3.4609	37.0568	70.6527	104.2486	137.8445
星合儒日	1752033.519	1752432.365		1752831.211	1753230.057	1753628.903	1754027.749	1754426.595
星合干支时刻	丙戌 51.9 刻	乙丑 36.5 刻		甲辰 21.1 刻	癸未 5.7 刻	辛酉 90.3 刻	庚子 74.9 刻	己卯 59.5 刻
儒略历	84.10.21	85.11.24		86.12.28	88.1.31	89.3.4	90.4.7	91.5.11
实合儒略历	84.10.15	85.11.15		86.12.17	88.1.21	89.2.25	90.4.4	91.5.11
儒略日	1752027.618	1752423.668		1752821.102	1753220.519	1753621.969	1754024.569	1754426.970
相差(日)	5.901	8.697		10.109	9.538	6.934	3.180	—0.375
星赤道宿度	氐 11.52	箕 2.11		斗 24.71	危 2.06	壁 2.65	娄 11.25	毕 7.84
黄道宿度	氐 9.52	尾 17.11		斗 22.71	危 4.06	壁 3.65	娄 10.25	毕 4.84
极黄经	208°.1	241°.55		275°.42	308°.07	341°.0	13°.72	47°.43
实合黄经	200°.89	232°.15		265°.00	299°.70	335°.89	12°.44	48°.08
相差	7°.20	14°.25		10°.90	11°.06	10°.28	5°.00	—1°.54